Приложение 1

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовател учреждение
высшего образования
«Саратовский государственный аграрный университет имени Н.И. Вавилова»

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
________ / Камышова Г Н. /
«27» августа 20 19 г.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Дисциплина	**Математика**
Направление подготовки	**36.03.02 Зоотехния**
Направленность (профиль)	**Продуктивное животноводство**
Квалификация выпускника	**Бакалавр**
Нормативный срок обучения	**4 года**
Форма обучения	**Очная**
Кафедра-разработчик	**Математика , механика и инженерная графика**
Ведущий преподаватель	**Кириллова Т.В., доцент**

Разработчик(и):доцент, *Кириллова Т.В.* ________
(подпись)

Саратов 2019

Содержание

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения ОПОП

В результате изучения дисциплины «Математика» обучающиеся, в соответствии с ФГОС ВО по направлению подготовки 36.03.02 Зоотехния, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 21.03.2016.г. № 250, формируют следующие компетенции:

- ««способностью использовать современные информационные технологии» (ОПК - 3).

.

Формирование компетенций в процессе изучения дисциплины «Математика»

Компетенция		Структурные элементы компетенции (в результате освоения дисциплины обучающий должен знать, уметь, владеть)	Этапы формирования компетенции в процессе освоения ОПОП (семестр)*	Виды занятий для формирования компетенции	Оценочные средства для оценки уровня сформированности компетенции
Код	Наименование				
1	2	3	4	5	6
ОПК-3	способностью использо-вать современные инфор-мационные технологии»	**знает:** *линейную алгебру, дифференциальное и интегральное исчисление, тео-рию вероятностей и математиче-скую статистику, современные вычислительные средства.*	1	лекции, /практические/занятие	доклад/ тестовые задания/типовой расчет/ /контрольная работа/
		умеет: *решать системы линейных алгебраических уравнений, дифференцировать и интегрировать функции, производить вероятностные и статистические расчеты, использовать современные*			

		вычислительны е средства.			
		владеет: *методами решения си-стем линейных алгеб-раических уравнений, нахождения производ-ных и интегралов, ме-тодами теории вероятностей и матема-тической статистки, современными вычислительны ми средствами*			

Компетенция ОПК-3– также формируется в ходе освоения дисциплин: Информатика;Информационные технологии в животноводстве; Производственная практика; Преддипломная практика; Подготовка и защита ВКР.

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Перечень оценочных средств*

№ п/п	Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в ФОС
1	доклад	продукт самостоятельной работы обучающегося, представляющий собой краткое изложение в устном виде полученных результатов теоретического анализа определенной научной (учебно-исследовательской) темы, где автор раскрывает суть исследуемой проблемы, приводит различные точки зрения, а также собственные взгляды на нее	темы рефератов: Численные методы решения экстремальных задач, Понятие о численных методах решения обыкновенных дифференциальных уравнений Метод наименьших квадратов, Математика - язык ах познания мира Применение кривых второго порядка в компьютерных систем Суммирование расходящихся рядов
2	контрольная работа	средство проверки умений применять полученные знания для решения задач	комплект контрольных заданий по вариантам

		определенного типа по разделу или нескольким разделам	
3	Типовой расчет	Средство проверки умений применять по-лученные знания по заранее определенной методике для решения задач или заданий по модулю или дисциплине в целом.	Комплект заданий для выполнения типовойго расчет
4	тестирование	метод, который позволяет выявить уровень знаний, умений и навыков, способностей и других качеств личности, а также их соответствие определенным нормам путем анализа способов выполнения обучающимися ряда специальных заданий	банк тестовых заданий
5	Собеседование	Средство контроля, организованное как специальная беседа педагогического работника с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу, теме, проблеме и т.п.	Вопросы по темам/разделам дисциплины

Таблица 1

Программа оценивания контролируемой дисциплины

№ п/п	Контролируемые разделы (темы дисциплины)	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
1	2	3	4
1.	Элементы линейной алгебры.	ОПК - 3	типовой расчет №1,контрольная работа №1, устный опрос,т естовые задания, доклад
2.	Элементы векторной алгебры	ОПК - 3	типовой расчет №1,контрольная работа №1, устный опрос,т естовые задания, доклад
3.	Аналитическая геометрия на плоскости.	ОПК - 3	типовой расчет №1,контрольная работа №1, устный опрос,т естовые задания, доклад
4.	Аналитическая геометрия в пространстве	ОПК - 3	типовой расчет №1,контрольная работа №1, устный опрос,т естовые задания, доклад
5.	Дифференциальное исчисление функции.	ОПК - 3	типовой расчет №2,контрольная работа №2, устный опрос,т естовые задания, доклад

№ п/п	Контролируемые разделы (темы дисциплины)	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства
1	2	3	4
6.	Интегральное исчисление функции одной переменной.	ОПК - 3	типовой расчет №2,контрольная работа №2, устный опрос,т естовые задания, доклад
7.	Теория вероятностей. Случайная величини.	ОПК - 3	типовой расчет №3,контрольная работа №3, устный опрос,т естовые задания, доклад
8.	Математическая статистика	ОПК - 3	типовой расчет №3,контрольная работа №3, устный опрос,т естовые задания, доклад

Описание показателей и критериев оценивания компетенций по дисциплине «Математика» на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Код компетенции, этапы освоения компетенции	Планируемые результаты обучения	Показатели и критерии оценивания результатов обучения			
		ниже порогового уровня (неудовлетворительно)	пороговый уровень (удовлетворительно)	продвинутый уровень (хорошо)	высокий уровень (отлично)
1	2	3	4	5	6
ОПК-3, 1 семестр	**знает:** *линейную алгебру, дифференциальное и интегральное исчисление, тео-рию вероятностей и математиче-скую статистику, современные вы-числительные средства*	обучающийся не знает значительной части программного материала, плохо ориентируется в материале, *в* понятиях и методах линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального исчисления, не знает практику применения материала, допускает существенные ошибки	обучающийся демонстрирует знания только основного материала, но не знает деталей, допускает неточности в формулировках, нарушает логическую последовательность в изложении программного материала	обучающийся демонстрирует знание материала, не допускает существенных неточностей	обучающийся демонстрирует знание линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального исчисления, практики применения материала, исчерпывающе и последовательно, четко и логично излагает материал, хорошо ориентируется в материале, не затрудняется с ответом

					при видоизменении заданий
	умеет: *решать системы линейных алгебраических уравнений, дифференцировать и интегрировать функции, производить вероятностные и статистические расчеты, использовать современные вычислительные средства..*	не умеет использовать методы и приемы *для решения задач в профессиональной деятельности* допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет самостоятельную работу, большинство заданий, предусмотренных программой дисциплины, не выполнено	в целом успешное, но не системное умение *применять изученные теоретические факты для решения задач в профессиональной деятельности*	в целом успешное, но содержащие отдельные пробелы, умение применять изученные теоретические факты для решения задач в профессиональной деятельности	сформированное умение применять изученные теоретические факты для решения задач в профессиональной деятельности
	владеет: *методами решения систем линейных алгебраических уравнений, нахождения производ-ных и интегралов, ме-тодами теории вероятностей и математической статистки, современными и вычислительными средствами.*	обучающийся не владеет навыками применения математических знаний и методов при решении прикладных задач, допускает существенные ошибки, с большими затруднениями выполняет самостоятельную работу, большинство заданий предусмотренных программой дисциплины не выполнено	в целом успешное, но не системное владение навыками применения математических знаний и методов линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального исчисления при решении прикладных задач	в целом успешное, но содержащее отдельные пробелы или сопровождающееся отдельными ошибками владение навыками применения математических знаний и методов линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального исчисления при решении прикладных	успешное и системное владение навыками применения математических знаний и методов линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального исчисления при решении прикладных задач и интерпретировать получаемые результаты

				задач	

3. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

3.1. Входной контроль

Цель проведения входного контроля:

- настроить обучаемого на данную предметную область;
- проверка исходного уровня знаний;
- определить готов или не готов данный обучаемый к работе по курсу;
- диагностировать по результатам выполнения входного контроля пробелы в знаниях обучаемых.

Содержание тестов сгруппировано вокруг основных разделов школьного курса математики: "Числа и вычисления", "Выражения и их преобразования", "Уравнения и неравенства", "Функция", "Геометрические фигуры. Измерение геометрических величин".

Тестовые задания оцениваются исходя из следующих критериев:

Результаты входного контроля используются при проведении промежуточной аттестации.

<u>Тест № 1</u>

Часть I

1) Найдите значение выражения $\sqrt{2x+1}$ при $x=-\frac{4}{9}$.

А. $\frac{\sqrt{17}}{3}$ В. $\frac{1}{3}$ Б. 1 Г. при $x=-\frac{4}{9}$ выражение не имеет смысла

2) Из формулы мощности $\mathrm{N}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{t}}$ выразите работу А

А. $A=\frac{Nt}{A}$ Б. $A=\frac{N}{t}$ В. $A=\frac{t}{N}$ Г. $A=Nt$

3) Сравните a^2 и a^3 , если известно, что $0 < a < 1$

А. $a^2<a^3$ Б. $a^2> a^3$ В. $a^2= a^3$ Г. Для сравнения не хватает данных.

4) Для биологической лаборатории купили оптический микроскоп , который дает возможность различить объекты размером до $2,5 \cdot 10^{-5}$ см. Выразите эту величину в миллиметрах.

А. 0,0000025 мм. Б. 0,000025 мм. В. 0,00025 мм. Г. 0,0025 мм

5) В двух библиотеках было одинаковое количество книг. Через год в первой библиотеке число книг увеличилось на 50%, а во второй- в 2 раза. В какой библиотеке книг стало больше?

А. В первой библиотеке

Б. Во второй библиотеке

В. Книг осталось поровну

Г. Для ответа не хватает данных

6) Упростите выражение $(a – 4)^2 – 2a(3a – 4)$.

А. $-5a^2 + 16$

Б. $-5a^2 + 8a – 16$

В. $-5a^2 + 8$

Г. $-5a^2 + 8a – 4$

7) Какое из данных выражений не равно $\sqrt{\dfrac{5}{48}}$?

А. $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}}$ Б. $\dfrac{\sqrt{15}}{12}$ В. $\dfrac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}$ Г. $\dfrac{\sqrt{5}}{8}$

8) Сократить дробь $\dfrac{a^2+3a}{9-a^2}$.

Ответ:___________________

9) Решите уравнение $3x^2 + x = 0$

Ответ:___________________

10) Вычислите координаты точки пересечения прямых

$2x + 3y = -12$ и $4x – 6y = 0$.

Ответ:___________________

11) Велосипедист от озера до деревни ехал со скоростью 15 км/ч, а обратно – со скоростью 10 км/ч. Сколько времени ушло у него на дорогу от озера до деревни, если на весь путь туда и обратно велосипедист затратил 1 ч?

Пусть ***x*** ч – время, затраченное на дорогу от озера до деревни. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

А. $15x = 10(1 – x)$

Б. $\dfrac{15}{x}+\dfrac{10}{1-x}=1$

В. $15x + 10(1 – x) = 1$

Г. $15(1 – x) = 10x$

12) При каких значениях ***x*** значения выражения **8x – 2** больше значений выражения **10x +1**?

А. При $x > -1.5$

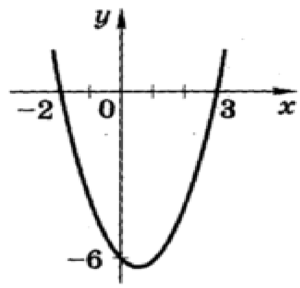
Б. При $x < -1.5$

В. При $x < 0.5$

Г. При $x > 0.5$

13) На рисунке изображен график функции

$y = x^2 - x - 6$



Используя график, решите неравенство

$x^2 - x - 6 > 0$

Ответ:___________________

14) В геометрической прогрессии $b_1 = 64,\ q = -\dfrac{1}{2}$. В каком случае при сравнении членов этой прогрессии знак неравенства поставлен неверно?

А. $\boldsymbol{b_2 < b_3}$

Б. $b_3 > b_4$

В. $b_4 > b_6$

Г. $b_5 > b_7$

15) В прямоугольном треугольнике АВС угол С=90°, АС=4 см, ВС=7см. Найдите расстояние от точки В до прямой АС.

А. **4 см** Б. **7 см** В. $\sqrt{65}$ **см** Г. $\sqrt{33}$ **см**

16) Найдите радиус окружности, если ее длина равна **88π м.**

А. 44π м Б. 22м В. 22π м Г. 44м

Часть II

17) Упростите выражение:

$$\left(a-\frac{4a-9}{a-2}\right):\left(2a-\frac{2a}{a-2}\right)$$

18) Из города А в город В, расстояние между которыми равно 300км, выехал автобус. Через 20 мин навстречу ему из В в А выехал автомобиль и через 2 ч после выезда встретил автобус. С какой скоростью ехал автомобиль, если известно, что она была на 20 км/ч больше скорости автобуса?

Ответы на тест

Тест № 1									
№ задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Ответ	**В**	**Г**	**Б**	**В**	**Б**	**А**	**Г**	$\frac{a}{3-a}$	$x_1=0$ $x_2=-\frac{1}{3}$
№ задания	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
Ответ	**(-3;-2)**	**А**	**Б**	**x<-2 или x>3**	**В**	**Б**	**Г**	$\frac{a-3}{2a}$	**80 км/ч**

Критерии оценки входного контроля:

Оценка «5» - отлично – если обучающийся раскрыл основные положения вопроса, обосновал свой ответ, привел примеры.

Оценка «4» - хорошо - неполно, но правильно изложен ответ на задание, при изложении допущены несущественные ошибки.

Оценка «3» - удовлетворительно – если обучающийся изложил задание недостаточно последовательно и не раскрыл ответ целиком

Оценка «2» - неудовлетворительно – задание не выполнено или выполненное задание не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем.

3.2 Контрольные рабаты.

Цель контрольной работы: углубить, систематизировать и закрепить теоретические знания обучающихся; проверить степень усвоения одной или нескольких тем или вопросов.

- Тематика контрольных работ устанавливается в соответствии с изученной темой.
- количество вариантов заданий – по теме используется 30 вариантов заданий.

Контрольная работа №1
«Элементы линейной алгебры
Вариант 1

Задание 1 Исследовать на совместность систему линейных уравнений и решить тремя способами:

а) по формулам Крамера;

б) матричным методом;

$$\begin{cases} 5X + 8Y - Z = 7 \\ X + 2Y + 3Z = 1 \\ 2X - 3Y + 2Z = 9 \end{cases}$$

Задание 2 Применяя метод исключения неизвестных (метод Гаусса), решить систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -8 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

Контрольная работа №2.

Вариант 1

« Дифференциальное и интегральное исчисление функции»

Задание 1. Исследовать функцию и построить схематически её график:

1) $y = x^3 - x^2 - 5x + 10$ 2) $y = x^3 - 11x^2 + 39x - 45$

Задание 2. Вычислить неопределенный интеграл:

1. $\int \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt[4]{x}}dx.$ 2. $\int \frac{3x+1}{3x-2}dx.$ 3. $\int (4-3x)e^{-3x}dx.$

4. $\int \left(x^2+5x+6\right)\cos 2x dx.$ 5. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}.$ 6. $\int \frac{x^3+1}{x^2+x}dx.$

7. $\int \frac{6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^2}dx.$ 8. $\int \frac{4x^2+4x+2}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)}dx.$

Задание 3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x dx.$

Задание 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2,\ y = \sqrt{x}.$

Задание 5.. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - 0{,}5x^2,\ x + y = 2,$ вокруг оси $Oy.$

Задание 6. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx.$

Контрольная работа №3.

«Теория вероятности. Случайная величина»

Вариант 1.

1. Три стрелка стреляют в цель независимо друг от друга. Первый стрелок попадает в цель с вероятностью 0,6, второй – с вероятностью 0,7, а третий – с вероятностью 0,75. Найти

вероятность хотя бы одного попадания в цель, если каждый стрелок сделает по одному выстрелу.

2. Ожидается прибытие трех судов с фруктами. Статистика показывает, что 1% судов привозит товар, непригодный к пользованию. Найти вероятность того, что

а) хотя бы два судна привезут качественный товар;

б) ни одно судно не привезет качественный товар.

3. В среднем 5% студентов финансово-кредитного факультета сдают экзамен по высшей математике на «отлично». Найти вероятность того, что из 100 наудачу выбранных студентов этого факультета сдадут экзамен по математике на «отлично»:

а) два студента;

б) не менее пяти студентов.

4. Законы распределения случайных величин X и Y заданы таблицами:

X:

x_i	0	1
p_i	?	0,4

Y:

y_i	-1	2	3
p_i	0,3	?	0,5

Найти:

а) вероятности P(X = 0) и P(Y = 2);

б) закон распределения случайной величины Z = X – Y;

в) дисперсию D(Z).

5. Объем продаж в течение месяца – это случайная величина, подчиненная нормальному закону распределения с параметрами a = 500 и σ = 120. Найти вероятность того, что объем товара в данном месяце заключен в границах от 480 до 600.

3.3 Типовой расчет

Цель типового расчета углубить, систематизировать и закрепить теоретические знания обучающихся; проверить степень усвоения одной или нескольких тем или вопросов Тематика типового расчета определена в соответствии с - с изученной темой. количество (таблица 3).

количество вариантов заданий – по теме используется 130 вариантов заданий (приведен один из вариантов).

Типовой расчет №1.

«Элементы векторной алгебры и Аналитической геометрии на плоскости и в пространстве»

Образец решения типового расчёта

Вариант 0

1. Разложить вектор $\overline{\mathrm{C}} = \{2,0\}$ по векторам $\bar{\mathrm{a}} = \{1,1\}$ и $\bar{\mathrm{b}} = \{1,-1\}$

2. Найти длину вектора $\overline{p} + 2\overline{q}$, если $\overline{p} = \overline{a} - \overline{b},\ \overline{q} = \overline{a} + 2\overline{b},\ \left|\overline{a}\right| = 1;$ $\left|\overline{b}\right| = 3;\ \overline{a}\hat{}\overline{b} = \frac{2}{3}\pi$.

3. Найти вектор $\bar{\mathrm{x}}$, коллинеарный вектору $\overline{a} = \{2, 1, -2\}$ и удовлетворяю-щий условию $(\overline{x} \cdot \overline{a}) = 27$.

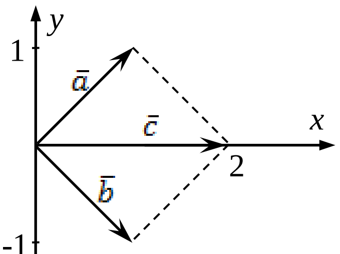
4. Вычислить угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{p} = 2\overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$ и $\overline{q} = \overline{a} - 3\overline{b} + \overline{c}$, где $\overline{a}; \overline{b}; \overline{c}$ – единичные взаимноперпендикулярные векторы (косинус угла).

5. Найти направляющие косинусы вектора силы $\overline{\mathrm{F}} = \{1, -1, 1\}$, приложен-ной в точке B(5, 1, 0), и момент этой силы относительно точки A(3, 2, -1).

6. Найти вектор $\overline{\mathrm{x}}$, перпендикулярный векторам $\overline{a} = \{1, 1, 1\}$ и $\overline{b} = \{2, 0, 1\}$ и образующий с осью OX тупой угол, если $\left|\overline{x}\right| = \sqrt{6}$.
7. Определить, лежат ли точки A(1, 2, 3); B(0, 5, 5); C(3, -1, -1); D(-2, 14, 9) в одной плоскости.
8. В треугольнике ABC известны координаты вершины A(4, 0) и уравнения высоты $\mathrm{BE}: 2\mathrm{x} - 3\mathrm{y} + 15 = 0$ и медианы $\mathrm{BD}: 2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} - 3 = 0$. Составить уравнения сторон треугольника.
9. Найти длину высоты пирамиды ABCD, опущенную из вершины D, если D(1, 6, 3), A(4, 5, 2), B(-1, 11, 6) и C(2, -1, 3).
10. Найти радиус и координаты центра окружности, заданной уравнением.
$y^2 + x^2 + 8y - 10x + 37 = 0.$

I. Решение

Разложить вектор $\overline{\mathrm{c}}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – это значит представить $\overline{\mathrm{c}}$ в виде $\mathrm{c} = \alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b}$, где α и β пока неизвестные числа. Переходя к координатам, получим: $2\overline{i} + 0\overline{j} = (\alpha + \beta)\overline{i} + (\alpha - \beta)\overline{j}.$



В результате приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases},$$

решением которой являются $\alpha = 1$ и $\beta = 1$. Отсюда

Ответ: $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$

2. Решение

Как известно, модуль вектора равен корню квадратному из скалярного квадрата этого вектора $|\overline{p} + 2\overline{q}| = \sqrt{(\overline{p} + 2\overline{q})^2}$. Находим скалярный квадрат

$(\overline{p} + 2\overline{q})^2 = \left(\overline{a} - \overline{b} + 2\overline{a} + 4\overline{b}\right)^2 = \left(3\overline{a} + 3\overline{b}\right)^2 = 9(\overline{a}^2 + 2\overline{a}\overline{b} + \overline{b}^2) =$
$= 9\left(1 + 2 * 3 * cos\frac{2}{3}\pi + 9\right) = 63.$ Отсюда $\left|\overline{p} + 2\overline{q}\right| = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}.$

Ответ: $3\sqrt{7}$

3. Решение

В силу коллинеарности вектор $\overline{\mathrm{x}}$ можно представить в виде $\overline{\mathrm{x}} = \lambda\overline{\mathrm{a}}$, где λ – пока неизвестный множитель. Для его определения используем второй пункт условия

$(\overline{x} \cdot \overline{a}) = \lambda\overline{a}^2 = \lambda(4 + 1 + 4) = 9\lambda = 27.$ Отсюда $\lambda = 3$ и $\overline{x} = 3\overline{a} = \{6, 3, -6\}.$

Ответ: $\overline{x} = \{6, 3, -6\}$

4. Решение

Известно, что диагонали параллелограмма можно найти

$$\overline{d}1 = \overline{p} + \overline{q} = 3\overline{a} - 2\overline{b} + 0\overline{c}$$
$$\overline{d}2 = \overline{p} - \overline{q} = \overline{a} + 4\overline{b} - 2\overline{c}$$

т.к. векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ представляют собой единичные взаимно перпендику-лярные вектора, то их можно считать координатным базисом, тогда для нахождения требуемого угла воспользуемся формулой

$$cos(\bar{d}_1 \wedge \bar{d}_2) = \frac{\bar{d}1 * \bar{d}2}{|\bar{d}1| * |\bar{d}2|} = \frac{3*1+(-2)*4+0*(-2)}{\sqrt{3^2+1^2}*\sqrt{1^2+4^2+2^2}} = \frac{-5}{\sqrt{13}*\sqrt{21}} = \frac{-5}{\sqrt{273}}$$

Ответ: $\frac{-5}{\sqrt{273}}$

5. Решение

Находим направляющие косинусы вектора силы $|\bar{F}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$$\cos\alpha = \frac{Fx}{|\bar{F}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\beta = \frac{Fy}{|\bar{F}|} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\gamma = \frac{Fz}{|\bar{F}|} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

момент силы как векторное произведение вектора $\overline{AB} =$
$= \{5-3; 1-2; 0-(-1)\} = \{2, -1, 1\}$ на вектор $\bar{F}$:

$$\overline{m} = [[\overline{AB}, \overline{F}]] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\bar{j} - \bar{k}.$$ Следовательно, $\overline{m} = \{0, -1, -1\}$.

Ответ: $\overline{m} = \{0, -1, -1\}$.

6. Решение

Найдем вектор $\bar{c} \perp \bar{a}, \bar{c} \perp \bar{b}$, следовательно,

$$\bar{c} = [[\bar{a}, \bar{b}]] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$$

Поскольку вектор $\bar{x}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то он коллинеарен вектору $\bar{c}$. Следовательно, $\bar{x} = \lambda * \bar{c} = \{\lambda, \lambda, -2\lambda\}$.

Так как $|\bar{x}| = \sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda^2} = \sqrt{6}\,|\lambda| = \sqrt{6}$, то $\lambda = \pm 1$. Вектор $\bar{x}$ образует тупой угол с осью ОХ, поэтому его проекция (координата) на эту ось должна быть отрицательной, отсюда $\lambda = -1$ и $\bar{x} = -\bar{c} = \{-1, -1, 2\}$.

Ответ: $\bar{x} = \{-1, -1, 2\}$.

7. Решение

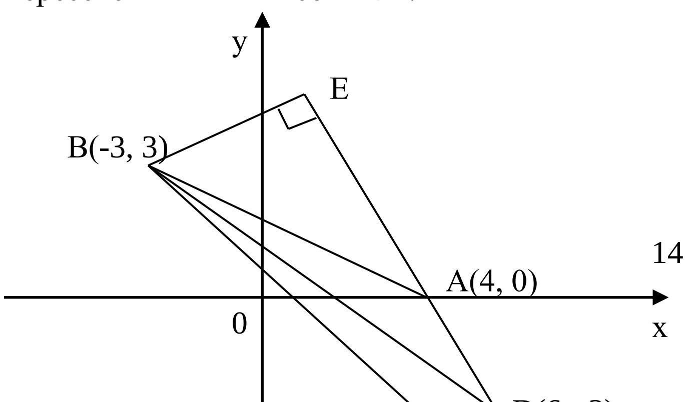
Рассмотрим три вектора $\overline{AB} = \{-1, 3, 2\}$, $\overline{AC} = \{2, -3, -4\}$ и $\overline{AD} = \{-3, 12, 6\}$. если точки *A, B, C, D* лежат в одной плоскости, то векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ компланарны. Для проверки составляем смешанное произведение этих векторов:

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 36 + 43 - 18 - 36 - 48 = 0,$$

следовательно, векторы компланарны и точки лежат в одной плоскости.

8. Решение

Сделаем для облегчения рассуждений чертеж. Находим координаты вершины *B* как точки пересечения *BD* и высоты *BE*:



$$\begin{cases} 2x - 3y + 15 = 0 \\ 2x + 3y - 3 = 0 \end{cases} => \begin{cases} x = -3 \\ y = 3 \end{cases}$$

Составим уравнение *AC*, для чего определим её угловой коэффициент из условия перпендикулярности *AC* и *BE*:

$$K_{BE} = \frac{2}{3}; K_{AC} = \frac{-1}{K_{BE}} = -\frac{3}{2}$$

Зная угловой коэффициент и одну точку, находим уравнение АС:

$$y = -\frac{3}{2}(x - 4) \text{ или } 2y + 3x - 12 = 0.$$

Находим координаты D как точки пересечения медианы BD и стороны AC:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 3 = 0 \\ 3x + 2y - 12 = 0 \end{cases} => \begin{cases} x = 6 \\ y = -3 \end{cases}$$

Находим координаты вершины *C*, используя то, что *D* делит отрезок *AC* пополам, *C(8, -6)*. Зная координаты всех вершин треугольника, составляем уравнения сторон *AB* и *BC* как прямых, проходящих через заданные точки.

$$AC: \frac{y-3}{0-3} = \frac{x+3}{4+3} \quad \text{или} \quad 3x + 7y - 12 = 0$$

$$BC: \frac{y-3}{-6-3} = \frac{x+3}{8+3} \quad \text{или} \quad 11y + 9x - 6 = 0.$$

Ответ: *AC:* $3x + 7y - 12 = 0$

BC: $11y + 9x - 6 = 0$

9. Решение

Длина высоты равна расстоянию от вершины D до плоскости ABC. Составим уравнение этой плоскости, воспользовавшись уравнением плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} X - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - 4 & y - 5 & z - 2 \\ -1 - 4 & 11 - 5 & -6 - 2 \\ 2 - 4 & -1 - 5 & 3 - 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - 4 & y - 5 & z - 2 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-4)\cdot\begin{vmatrix}6 & -8\\ -6 & 1\end{vmatrix}-(y-5)\cdot\begin{vmatrix}-5 & -8\\ -2 & 1\end{vmatrix}+(z-2)\cdot\begin{vmatrix}-5 & 6\\ -2 & -6\end{vmatrix}=0;$$

$$-42(x-4)+21(y-5)+42(z-2)=0 \Rightarrow 2x-y-2z+1=0.$$

Находим теперь расстояние от D до плоскости ABC:

$$h=\frac{|2*1-1*6-2*3+1|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{9}{3}=3.$$

Ответ: h = 3

10. Решение

Приводим уравнение к каноническому виду, выделяя полные квадраты

$(x^2-10x+25)-25+(y^2+8y+16)-16+37=0$ или

$(x-5)^2+(y+4)^2=4.$

Полученное уравнение определяет окружность радиуса 2 с центром в точке (5, -4).

Ответ: Окружность R = 2, центр (5, -4)

Задача 1

1. Даны три последовательные вершины параллелограмма A(2;-3), B(5;1),C(3;-4). Не находя координаты вершины D, найти:

1) уравнение стороны AD;
2) уравнение высоты BK, опущенной из вершины B на сторону AD;
3) длину высоты BK;
4) уравнение диагонали BD;
5) тангенс угла между диагоналями параллелограмма.

Записать общие уравнения найденных прямых. Построить чертеж.

Решение.

Сначала построим чертеж. Построим в прямоугольной декартовой системе координат точки $A(2;-3)$, $B(5;1)$, $C(3;-4)$. Построим отрезки AB и BC.

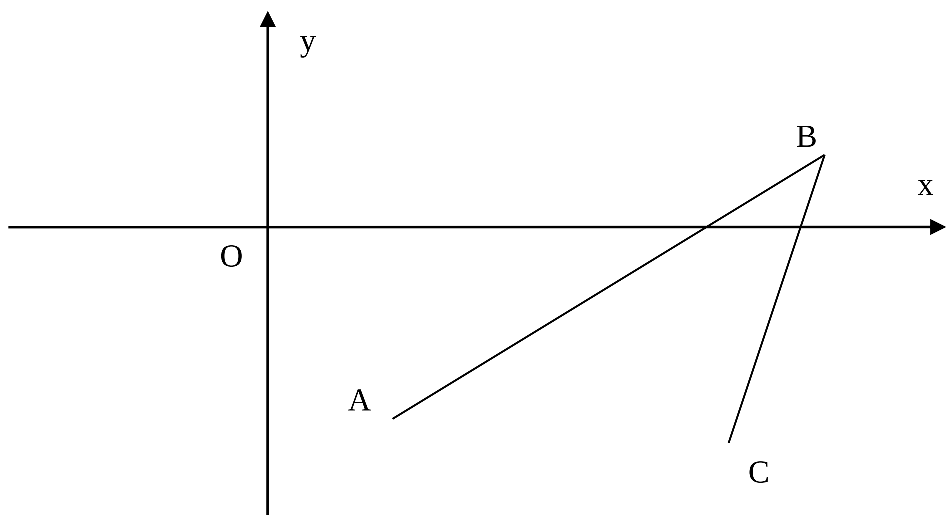


Рис. 1

Достроим полученный рисунок до параллелограмма и нанесем на чертеж высоту BK.

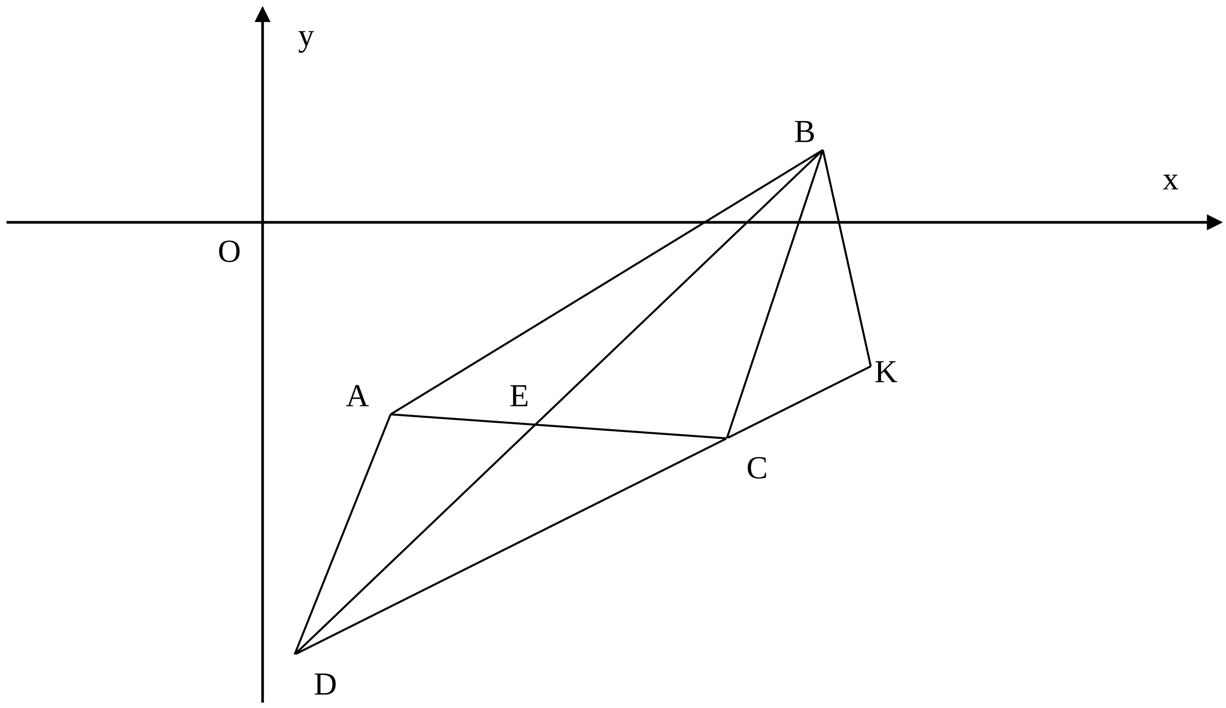


Рис. 2

1) Составим уравнение прямой AD.

а) Предварительно найдем уравнение прямой BC. Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (3.1)$$

По условию $B(5;1)$, $C(3;-4)$. Подставим координаты точек B и C в уравнение (3.1): $\frac{x-5}{3-5}=\frac{y-1}{-4-1}$, т.е. $\frac{x-5}{-2}=\frac{y-1}{-5}$.

Запишем полученное уравнение в общем виде, то есть в виде $Ax+By+C=0$. Для этого в последнем уравнении избавимся от знаменателей $-5(x-5)=-2(y-1)$ и проведем преобразования, перенося все слагаемые в левую часть равенства: $-5x+2y+23=0$ или $5x-2y-23=0$.

Из этого уравнения выразим y: $-2y=-5x+23$; $y=\frac{5}{2}x-\frac{23}{2}$. Получили уравнение вида $y=kx+b$ - уравнение с угловым коэффициентом.

б) Воспользуемся тем фактом, что противоположные стороны параллелограмма параллельны. Составим искомое уравнение прямой AD как уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно прямой BC.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0;y_0)$ в данном направлении, имеет вид

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad (3.2)$$

где направление определяется угловым коэффициентом k.

Условие параллельности двух прямых $y=kx+b$ и $y=k_1x+b_1$ имеет вид

$$k=k_1 \qquad (3.3)$$

По условию задачи $A(2;-3)$, прямая BC: $y=\frac{5}{2}x-\frac{23}{2}$. Подставим координаты точки A в уравнение (3.2): $y+3=k(x-2)$. Так как прямая AD параллельна прямой BC, то в силу формулы (3.3) их угловые коэффициенты совпадают. Угловой коэффициент прямой BC равен $\frac{5}{2}$, следовательно, уравнение прямой AD имеет вид $y+3=\frac{5}{2}(x-2)$.

Запишем уравнение прямой AD в общем виде. Для этого раскроем скобки и все слагаемые перенесем в левую часть равенства: $-\frac{5}{2}x+y+8=0$. Умножим обе часть равенства на (-2) и получим общее уравнение прямой AD: $5x-2y-16=0$.

Запишем уравнение прямой AD в виде с угловым коэффициентом. Для этого выразим y из общего уравнения: $y=\frac{5}{2}x-8$.

2) Составим уравнение высоты BK, проведенной из вершины B на сторону AD как уравнение прямой, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AD.

Условие перпендикулярности двух прямых $y=kx+b$ и $y=k_1x+b_1$ имеет вид

$$k=-\frac{1}{k_1} \tag{3.4}$$

Подставим координаты точки B в уравнение (3.2): $y-1=k(x-5)$. Так как высота BK перпендикулярна прямой AD, то их угловые коэффициенты связаны соотношением (3.4). Угловой коэффициент прямой AD равен $\frac{5}{2}$, следовательно, угловой коэффициент высоты BK равен $-\frac{2}{5}$ и уравнение прямой BK имеет вид $y-1=-\frac{2}{5}(x-5)$. Запишем уравнение высоты BK в общем виде: $2x+5y-15=0$. Запишем это же уравнение в виде с угловым коэффициентом: $y=-\frac{2}{5}x+3$.

3) Найдем длину высоты BK как расстояние от точки B до прямой AD.

Расстояние d от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из точки на прямую и определяется формулой

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{3.5}$$

Так как BK перпендикулярна AD, то длина BK может быть найдена с помощью формулы (3.5). По условию $B(5;1)$, прямая AD определяется уравнением $5x-2y-16=0$. В силу формулы (3.5) длина высоты BK равна $d=\frac{|5\cdot 5-2\cdot 1-16|}{\sqrt{5^2+(-2)^2}}=\frac{|7|}{\sqrt{25+4}}=\frac{7}{\sqrt{29}}$.

4) Найдем уравнение диагонали BD как уравнение прямой, проходящей через точки B и E, где E - середина отрезка AC.

а) Если $A(x_1;y_1)$ и $C(x_2;y_2)$, то координаты точки $E(x_0;y_0)$ - середины отрезка AC, определяются формулами

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad y_0=\frac{y_1+y_2}{2} \tag{3.6}$$

По условию $A(2;-3)$, $C(3;-4)$. В силу формул (3.6) имеем: $x_0=\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}$, $y_0=\frac{-3-4}{2}=-\frac{7}{2}$.

Следовательно $E(\frac{5}{2};-\frac{7}{2})$.

б) Так как точка пересечения диагоналей является их серединой, то точка E (середина отрезка AC) является точкой пересечения диагоналей и диагональ BD проходит через точку E.

Воспользуемся уравнением (3.1). По условию $B(5;1)$, $E(\frac{5}{2};-\frac{7}{2})$. В силу формулы (3.1) уравнение прямой BE (диагонали BD) имеет вид: $\frac{x-5}{\frac{5}{2}-5}=\frac{y-1}{-\frac{7}{2}-1}$ или $\frac{x-5}{-\frac{5}{2}}=\frac{y-1}{-\frac{9}{2}}$. Запишем это уравнение в общем виде: $9x-5y-40=0$. Запишем это же уравнение в виде с угловым коэффициентом: $y=\frac{9}{5}x-8$.

5) Найдем тангенс угла между диагоналями BD и AC.

а) Найдем уравнение диагонали AC как уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Воспользуемся уравнением (3.1). По условию $A(2;-3)$, $C(3;-4)$. Следовательно, $\frac{x-2}{3-2}=\frac{y+3}{-4+3}$.

Общее уравнение диагонали AC имеет вид $x+y+1=0$, уравнение с угловым коэффициентом – вид $y=-x-1$, угловой коэффициент k_1 прямой AC равен -1.

б) Уравнение диагонали BD имеет вид $y=\frac{9}{5}x-8$, ее угловой коэффициент $k_2=\frac{9}{5}$.

в) Тангенс угла φ между прямыми $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ определяется формулой

$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$$

Следовательно, $tg\varphi=\left|\frac{\frac{9}{5}-(-1)}{1+\frac{9}{5}\cdot(-1)}\right|=\left|\frac{\frac{14}{5}}{-\frac{4}{5}}\right|=\frac{7}{2}$. Отсюда $\varphi=arctg\,\frac{7}{2}$.

Задача №2.

2. Условие задачи №2 несколько различается в зависимости от номера варианта контрольной работы. Приведем решения простейших задач, входящих в это задание.

1) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;3;2)$, $B(-2;1;0)$, $C(4;2;-3)$.

Решение.

Уравнение плоскости, проходящей через точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (3.7)$$

Тогда уравнение плоскости ABC в силу уравнения (3.7) имеет вид $\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ -2-1 & 1-3 & 0-2 \\ 4-1 & 2-3 & -3-2 \end{vmatrix}=0$

или $\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ -3 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix}=0$.

Запишем полученное уравнение в общем виде, т.е. в виде $Ax+By+Cz+D=0$. Для этого раскроем определитель по первой строке $(x-1)\cdot(10-2)-(y-3)\cdot(15+6)+(z-2)\cdot(3+6)=0$. После преобразований получим: $8x-21y+9z+37=0$.

2) Найти нормальный вектор плоскости $2x+3y-z+5=0$.

Решение.

Нормальный вектор $\overline{N}$ - это вектор, перпендикулярный плоскости. Если плоскость задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, то нормальный вектор имеет координаты $\{A,B,C\}$.

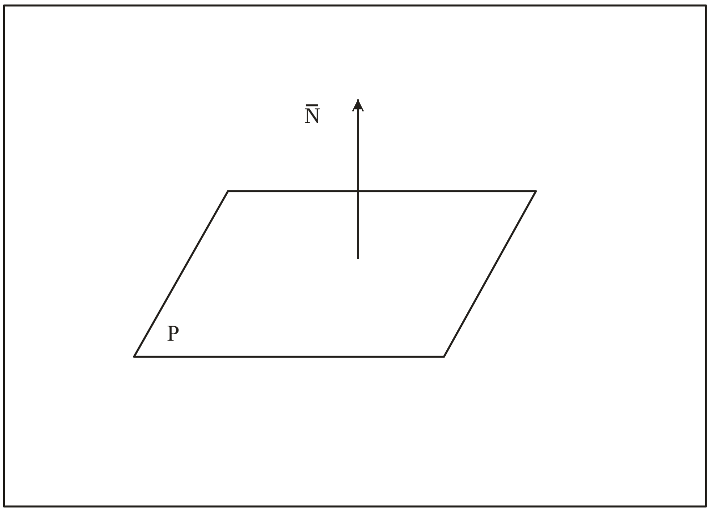


Рис. 3

Для плоскости $2x+3y-z+5=0$ нормальным является вектор $\overline{N}=\{2;3;-1\}$.

Отметим, что любой вектор, коллинеарный вектору $\overline{N}=\{2;3;-1\}$ так же является нормальным вектором плоскости $2x+3y-z+5=0$. Таким образом, при каждом ненулевом λ вектор с координатами $\{2\lambda;3\lambda;-\lambda\}$ будет являться нормальным вектором рассматриваемой плоскости.

3) Найти косинус угла между плоскостями $2x-3y+z-4=0$ и $x+5y+4z=0$.

Решение.

Угол φ между двумя плоскостями $P_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $P_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ представляет собой угол между их нормальными векторами и определяется равенством

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Для плоскости $2x-3y+z-4=0$ координаты нормального вектора $\overline{N}_1=\{A_1;B_1;C_1\}$ определяются равенствами $A_1=2$, $B_1=-3$, $C_1=1$. Для плоскости $x+5y+4z=0$ - равенствами $A_2=1$, $B_2=5$, $C_2=4$. Следовательно,

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot1+(-3)\cdot5+1\cdot4}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+5^2+4^2}}=$$

$$\frac{2-15+4}{\sqrt{4+9+1}\cdot\sqrt{1+25+16}}=\frac{-9}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{42}}=-\frac{9}{\sqrt{588}}=-\frac{9}{14\sqrt{3}}=-\frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

4) Составить уравнение плоскости P, проходящей через точку $M_0(1;-2;5)$ параллельно плоскости P_1: $2x+3y-z+5=0$.

Решение.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (3.8)$$

Подставим в уравнение (3.8) координаты точки M_0: $A(x-1)+B(y+2)+C(z-5)=0$.

Условие параллельности плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \qquad (3.9)$$

Так как плоскости P и P_1 параллельны, то в качестве нормального вектора $\overline{N}$ плоскости P можно взять нормальный вектор $\overline{N_1}=\{2;3;-1\}$ плоскости P_1, т.е. в формуле (3.9) отношение $\frac{A}{2}=\frac{B}{3}=\frac{C}{-1}$ можно принять равным единице. Следовательно, уравнение плоскости P_1 примет вид $2(x-1)+3(y+2)-(z-5)=0$. Запишем это уравнение в общем виде: $2x+3y-z+9=0$.

5) Найти расстояние от точки $M_0(1,3,-2)$ до плоскости P: $3x-2y+4z-5=0$.

Решение.

Расстояние d от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $P: Ax+By+Cz+D=0$ представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость, и определяется формулой

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (3.10)$$

Для плоскости $3x-2y+4z-5=0$ координаты нормального вектора $\overline{N}=\{A;B;C\}$ определяются равенствами $A=3$, $B=-2$, $C=4$. Следовательно, $d=\frac{|3\cdot1-2\cdot3+4\cdot(-2)-5|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+4^2}}=\frac{|-16|}{\sqrt{9+4+16}}=\frac{16}{\sqrt{29}}$.

6) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(1;-2;3)$ и $M_2(3;1;2)$.

Решение.

Уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$ имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (3.11)$$

Так как $M_1(1;-2;3)$, $M_2(3;1;2)$, то в силу (3.11) получим уравнения $\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+2}{1+2}=\frac{z-3}{2-3}$ или $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{-1}$.

7) Найти направляющий вектор прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2}$.

Решение.

Направляющий вектор $\bar{s}$ - это вектор, параллельный прямой.

Если прямая задана каноническими уравнениями $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$, то направляющий вектор $\bar{s}$ имеет координаты $\{p;q;r\}$.

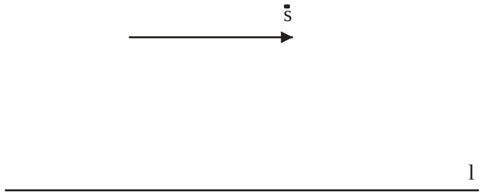


Рис. 4

Для рассматриваемой прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2}$ направляющим вектором является вектор $\bar{s}=\{2;3;-2\}$.

Отметим, что любой вектор, коллинеарный вектору $\bar{s}=\{2;3;-2\}$ так же является направляющим вектором прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2}$. Таким образом, при каждом ненулевом λ вектор с координатами $\{2\lambda;3\lambda;-2\lambda\}$ будет являться направляющим вектором рассматриваемой прямой.

8) Найти косинус угла между прямыми $\frac{x-7}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-5}{3}$ и $\frac{x+5}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z-6}{1}$.

Решение.

Угол φ между двумя прямыми $l_1:\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{r_1}$ и $l_2:\frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{r_2}$ представляет собой угол между их направляющими векторами и определяется равенством

$$\cos\varphi=\frac{p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}\cdot\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

Для прямой $\frac{x-7}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-5}{3}$ координаты направляющего вектора $\bar{s}_1=\{p_1;q_1;r_1\}$ определяются равенствами $p_1=2$, $q_1=-2$, $r_1=3$. Для прямой $\frac{x+5}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z-6}{1}$ - равенствами $p_2=3$, $q_2=-4$, $r_2=1$. Значит,

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot3+(-2)\cdot(-4)+3\cdot1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+3^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{6+8+3}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{26}}=\frac{17}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}.$$

9) Составить канонические уравнения прямой l, проходящей через точку $M_0(3;2;-1)$ параллельно прямой $l_1:\ \frac{x-5}{4}=\frac{y+7}{-2}=\frac{z-6}{3}$

Решение.

Канонические уравнения прямой имеют вид $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$. Здесь $(x_0;y_0;z_0)$ - координаты точки, через которую проходит прямая.

В канонические уравнения прямой l подставим координаты точки M_0. Получим: $\frac{x-3}{p}=\frac{y-2}{q}=\frac{z+1}{r}$.

Условие параллельности прямых $\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{r_1}$ и $\frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{r_2}$ имеет вид

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2} \qquad (3.12)$$

Так как прямые l и l_1 параллельны, то в качестве направляющего вектора $\bar{s}$ прямой l можно взять направляющий вектор $\bar{s}_1=\{4;-2;3\}$ прямой l_1, т.е. в формуле (3.12) отношение $\frac{p}{4}=\frac{q}{-2}=\frac{r}{3}$ можно принять равным единице. Следовательно, уравнение прямой l примет вид $\frac{x-3}{4}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{3}$.

10) Найти угол между прямой $l:\ \frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-1}$ и плоскостью $P:\ 2x-y+3z-4=0$.

Решение.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость. Угол φ между прямой и плоскостью равен $\frac{\pi}{2}-\psi$, где ψ - угол между направляющим вектором $\bar{s}$ прямой и нормальным вектором $\bar{N}$ плоскости.

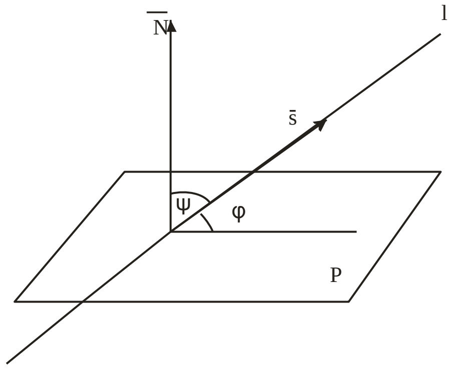


Рис. 5

Угол φ между прямой $l: \frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$ и плоскостью $P: Ax+By+Cz+D=0$ определяется формулой

$$\sin\varphi=\frac{Ap+Bq+Cr}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

Для плоскости P: $2x-y+3z-4=0$ координаты нормального вектора $\bar{N}=\{A;B;C\}$ определяются равенствами $A=2$, $B=-1$, $C=3$. Для прямой l: $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-1}$ координаты направляющего вектора $\bar{s}=\{p;q;r\}$ - равенствами $p=5$, $q=3$, $r=-1$. Синус угла между прямой и плоскостью равен $\sin\varphi=\frac{2\cdot5+(-1)\cdot3+3\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}\cdot\sqrt{5^2+3^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{35}}=\frac{4}{\sqrt{490}}$. Следовательно, $\varphi=\arcsin\frac{4}{\sqrt{490}}$.

11) Составить уравнение плоскости P, проходящей через точку $M_0(1,-2,-3)$ перпендикулярно прямой l: $\frac{x-3}{4}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-0}{-2}$.

Решение.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, имеет вид $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Подставим в указанное уравнение координаты точки M_0. Получим: $A(x-1)+B(y+2)+C(z+3)=0$.

Условие перпендикулярности плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ и прямой $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$ имеет вид

$$\frac{A}{p}=\frac{B}{q}=\frac{C}{r} \qquad (3.13)$$

Так как искомая плоскость P перпендикулярна прямой l, то в качестве нормального вектора $\bar{N}$ плоскости можно взять направляющий вектор $\bar{s}=\{4,1,-2\}$ прямой l, т.е. в формуле (3.13) отношение $\frac{A}{4}=\frac{B}{1}=\frac{C}{-2}$ можно принять равным единице. Следовательно, уравнение плоскости P примет вид $4\cdot(x-1)+1\cdot(y+2)+(-2)\cdot(z+3)=0$. Запишем это уравнение в общем виде: $4x+y-2z-8=0$.

12) Составить канонические уравнения прямой l, проходящей через точку $M_0(5;-3;2)$ перпендикулярно плоскости P: $x+4y-z=0$.

Решение.

Канонические уравнения прямой, проходящей через данную точку, имеют вид $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$.

Подставим в эти уравнения координаты точки M_0. Получим: $\frac{x-5}{p}=\frac{y+3}{q}=\frac{z-2}{r}$

Условие перпендикулярности прямой $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$ и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ имеет вид $\frac{A}{p}=\frac{B}{q}=\frac{C}{r}$.

Так как прямая l перпендикулярна плоскости P, то в качестве направляющего вектора $\bar{s}$ прямой l можно взять нормальный вектор $\overline{N}=\{1;4;-1\}$ плоскости P, т.е. в формуле (3.13) отношение $\frac{1}{p}=\frac{4}{q}=\frac{-1}{r}$ можно принять равным единице. Следовательно, уравнение прямой l примет вид: $\frac{x-5}{1}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-2}{-1}$.

13) Найти координаты точки пересечения прямой l: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{1}$ и плоскости P: $x+2y-z+5=0$.

Решение.

Координаты точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ пересечения прямой $\begin{cases} x=x_0+pt \\ y=y_0+qt \\ z=z_0+rt \end{cases}$ и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ представляют собой решение системы

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ x=x_0+pt \\ y=y_0+qt \\ z=z_0+rt \end{cases} \qquad (3.14)$$

Запишем параметрические уравнения прямой l: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3t \\ z=-1+t \end{cases}$ и подставим выражения для x,y,z в уравнение плоскости P: $(1+2t)+2\cdot 3t-(-1+t)+5=0$. Отсюда $7t+7=0$; $t=-1$. Подставим найденное значение t в параметрические уравнения прямой l: $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \\ z=-2 \end{cases}$. Следовательно, $M_0(-1;-3;-2)$.

Задача №3.

К кривым второго порядка относятся эллипс (рис.6), гипербола (рис. 7 и 8), парабола (рис. 9-12). Приведем рисунки и канонические уравнения этих кривых.

Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

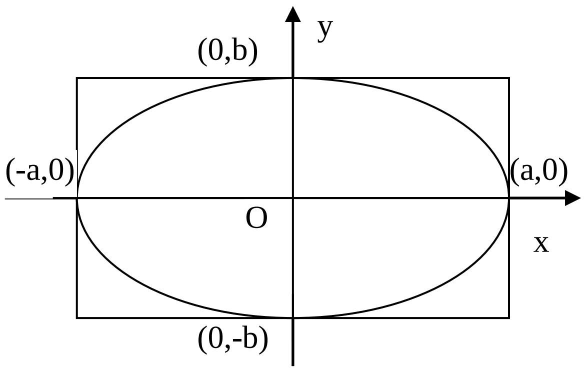


Рис. 6

Гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

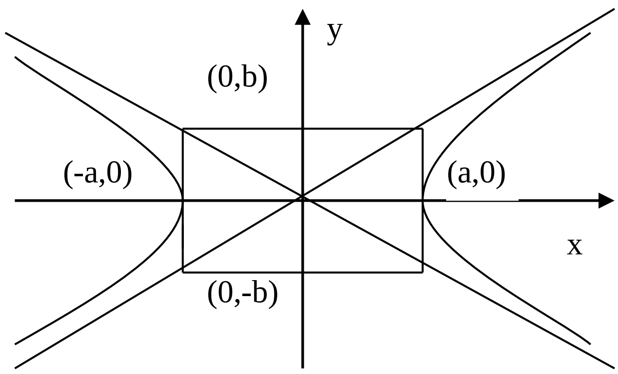


Рис. 7

Гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$.

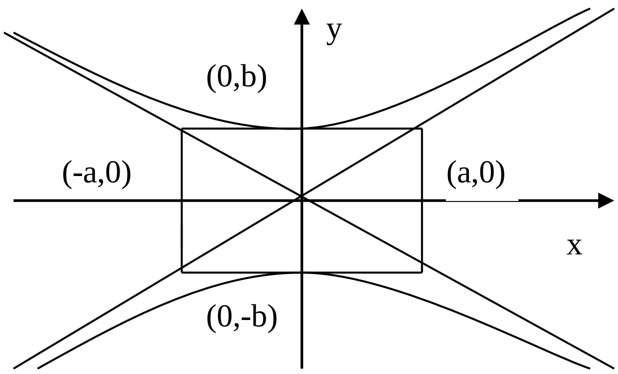


Рис. 8

Парабола $y^2=2px$

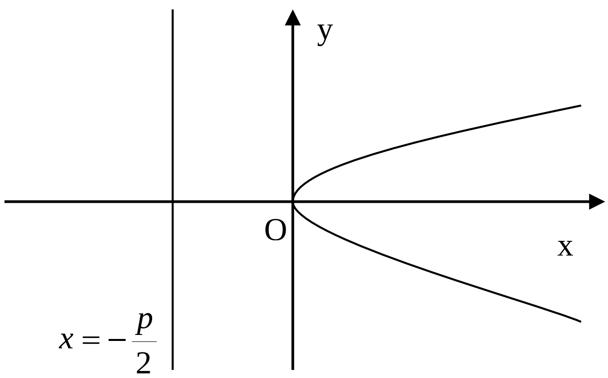


Рис. 9

Парабола $y^2=2px$

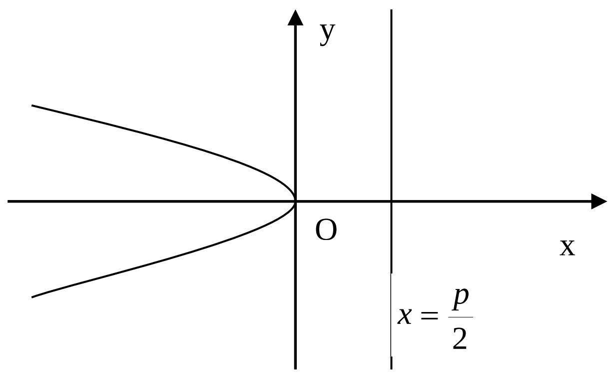


Рис. 10

Парабола $x^2=2py$

Парабола $x^2=-2py$

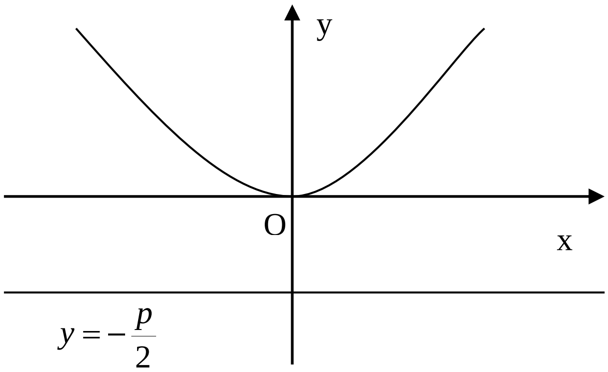


Рис. 11

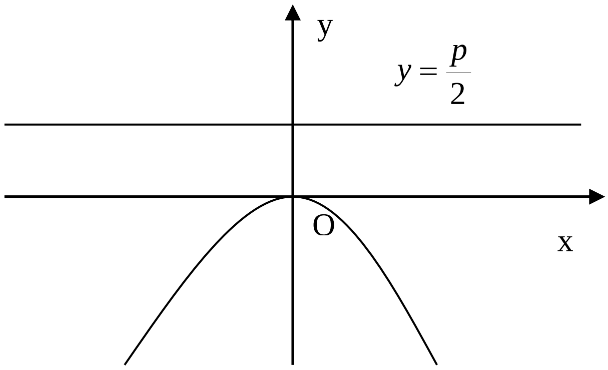


Рис12

Приведем примеры решения задачи №3.

Пример 1. Привести уравнение кривой второго порядка $4x^2+y^2+16x-2y-8=0$ к каноническому виду и построить кривую.

Решение.

Для приведения уравнения кривой второго порядка к каноническому виду применяют метод выделения полного квадрата.

Сгруппируем слагаемые, содержащие текущие координаты. Коэффициенты при x^2 и y^2 вынесем за скобки: $4(x^2+4x)+(y^2-2y)-8=0$.

Выделим полный квадрат: $4(x^2+4x+4)+(y^2-2y+1)-8-16-1=0$. Отсюда $4(x+2)^2+(y-1)^2=25$. Разделим обе части равенства на 25: $\frac{4(x+2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$. Запишем полученное уравнение в каноническом виде: $\frac{(x+2)^2}{25/4}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$.

Выполним параллельный перенос осей координат по формулам $\begin{cases} X=x-x_0 \\ Y=y-y_0 \end{cases}$. При таком преобразовании начало координат переносится в точку (x_0,y_0), уравнение эллипса принимает канонический вид $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$.

В нашем примере $x_0=-2$, $y_0=1$, $a=\frac{5}{2}$, $b=5$.

Итак, рассматриваемое уравнение определяет эллипс с центром в точке $C(-2;1)$ и полуосями $\frac{5}{2}$ и 5.

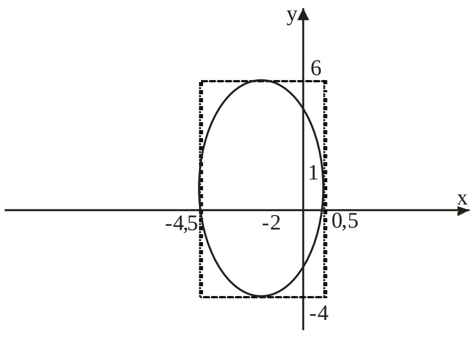


Рис. 13

Задача №4.

Кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho=1+\cos\varphi$.

Требуется:

1) найти точки, лежащие на кривой, давая φ значения через промежуток, равный $\frac{\pi}{8}$, начиная от $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$;
2) построить полученные точки;
3) построить кривую, соединив построенные точки (от руки или с помощью лекала);
4) составить уравнение этой кривой в прямоугольной декартовой системе координат.

Решение.

Сначала построим таблицу значений φ и ρ:

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$

ρ	2,00	1,92	1,71	1,38	1,00	0,62	0,29	0,08	0,00	0,08	0,29	0,62	1,00	1,38	1,71	1,92

Построим эти точки в полярной системе координат. Полярная система координат состоит из начала координат O (полюса) и полярной оси OP. Координаты точки M в полярной системе координат определяются расстоянием ρ от полюса (полярным радиусом) и углом φ между направлением полярной оси и полярным радиусом (полярным углом). Для того, чтобы построить точку M, необходимо построить луч, выходящий из точки O под углом φ к полярной оси; отложить на этом луче отрезок длиной ρ.

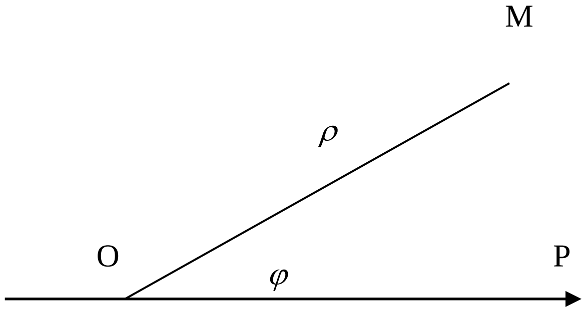


Рис. 14

Построим все точки, определенные в таблице и соединим их плавной линией

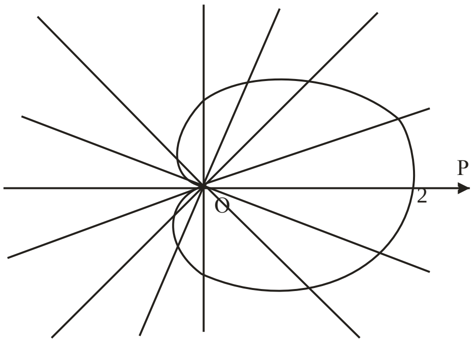


Рис. 15

Запишем уравнение рассматриваемой кривой в прямоугольной декартовой системе координат. Для этого воспользуемся формулами перехода от декартовой к полярной системе координат.

Если полюс совпадает с началом координат прямоугольной декартовой системы координат, полярная ось – с осью абсцисс, то между прямоугольными декартовыми координатами $(x; y)$ и полярными координатами $(\rho; \varphi)$ существует следующая связь:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}, \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Откуда

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

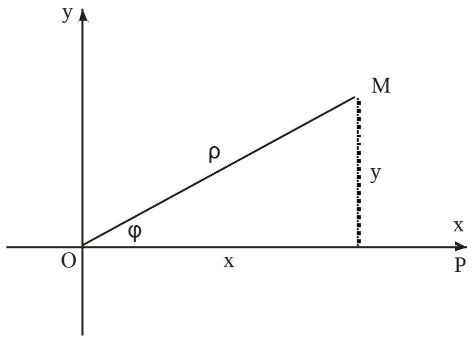


Рис. 16

Итак, в уравнении исходной кривой $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Поэтому уравнение $\rho = 1 + \cos\varphi$ принимает вид $\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. После преобразований получим уравнение $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x$.

Задача №5.

Построить на плоскости геометрическое место точек, определяемое неравенствами

1) $\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ y^2 \le 2x \\ y \ge 0 \end{cases}$

2) $-\sqrt{36 - (x+3)^2} \le y - 3 \le 0$

Решение.

Для того, чтобы решить неравенство $F(x, y) \ge 0$ на плоскости, надо построить график линии $F(x, y) = 0$. Кривая $F(x; y) = 0$ разбивает плоскость на части, в каждой из которых выражение $F(x; y)$ сохраняет свой знак. Выбирая пробную точку в каждой из этих частей, найдем часть плоскости, являющуюся искомым решением неравенства.

1) Построим прямые $x = 1$ и $x = 2$, заштрихуем область, в которой $1 \le x \le 2$. Затем построим параболу $y^2 = 2x$ и заштрихуем область, содержащую ось симметрии параболы (расположенную внутри параболы); построим прямую $y = 0$ и заштрихуем область, лежащую выше прямой. Пересечение всех заштрихованных областей и определит множество точек, представляющих решение рассматриваемой системы.

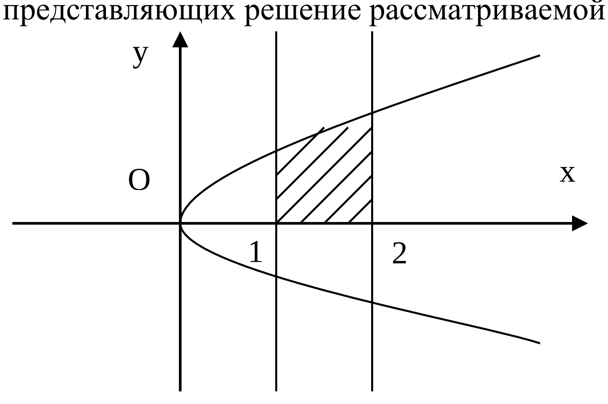


Рис. 17

2) Построим линию, определяемую уравнением $y - 3 = -\sqrt{36 - (x+3)^2}$. Эта линия представляет собой ту часть окружности $(y-3)^2 = 36 - (x+3)^2$ или $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 36$, на которой $y - 3 \le 0$. Далее построим прямую $y - 3 = 0$ ($y = 3$). Решением рассматриваемого

двойного неравенства является часть плоскости, расположенная между нижней половиной окружности $(x+3)^2+(y-3)^2=36$ с центром в точке $(-3,3)$ радиуса 6 прямой $y=3$.

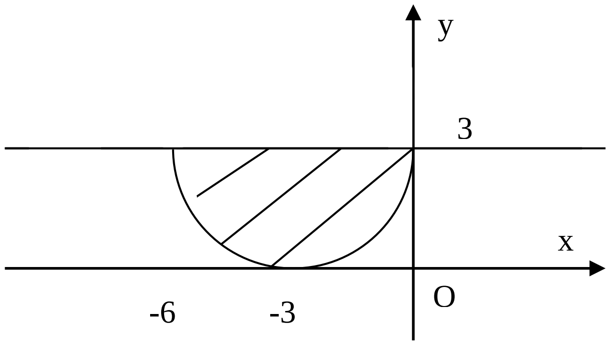


Рис. 18

Типовой расчет №2

«Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной»

Образец решения типового расчёта

Вариант 0

Образец решения типового расчёта.

Задание 1. Вычислить приращение функции $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ в точке $x_0=1$, соответствующее приращению аргумента $\Delta x=0{,}02$.

Решение:

Воспользуемся формулой: $\Delta f(x)=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Для данной функции получим: $\Delta f(x)=\dfrac{1}{(1+0{,}02)^2}-\dfrac{1}{1^2}=\dfrac{1}{1{,}0404}-1=-\dfrac{0{,}0404}{1{,}0404}=-\dfrac{101}{2601}$.

Ответ: $-\dfrac{101}{2601}$.

Задание 2. Найти производные функций:

2.1. $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

Решение:

$$y'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{1}{2}\left(\left(e^x\right)'-\left(e^{-x}\right)'\right)=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

. 2.2. $y=\ln\sqrt{\cos x}$.

Решение:

Используем правило дифференцирования сложной функции: $\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'(g)\cdot g'(x)$.

$$y'=\left(\ln\sqrt{\cos x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{\cos x}}\cdot(\sqrt{\cos x})'=\frac{1}{\sqrt{\cos x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}\cdot\cos' x=\frac{\sin x}{2\cos x}=\frac{1}{2}tg\, x.$$

Заметим, что этот результат можно было получить, представив функцию в виде $\dfrac{1}{2}\ln\cos x$.

2.3. $y=e^{-x}\ln x$.

Решение:

Воспользуемся правилом дифференцирования произведения двух функций: $(uv)' = u'v + uv'$. Получим $y' = (e^{-x}\ln x)' = -e^{-x}\cdot\ln x + \dfrac{e^{-x}}{x}$.

2.4. $y = \arccos\dfrac{1}{x^3}$.

Решение:

Снова используем формулу производной сложной функции: $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'(g)\cdot g'(x)$. Получим:

$$y' = (arctg\frac{1}{x^2})' = \frac{1}{1+\frac{1}{x^4}}\cdot(\frac{1}{x^2})' = \frac{x^4}{x^4+1}\cdot(-\frac{2}{x^3}) = -\frac{2x}{x^4+1}.$$

Задание 3. Продифференцировать неявно заданную функцию $2xy^2 - x^2y + x^2 + 2 = 0$.

Решение:

Продифференцируем обе части данного уравнения по переменной x, учитывая при этом, что y является функцией аргумента x. Получим:

$(2xy^2 - x^2y + x^2 + 2)'_x = 2y^2 + 4xyy' - 2xy - x^2y' + 2x = 0$. Из полученного равенства выразим производной y'_x: $4xyy' - x^2y' = 2xy - 2y^2 - 2x$, откуда $y' = \dfrac{2xy - 2y^2 - 2x}{4xy - x^2}$.

Задание 4. Продифференцировать функцию, заданную параметрически:

$$\begin{cases} x = 2\cos t^2, \\ y = \sin t - 3t. \end{cases}$$

Решение:

Используем правило дифференцирования функции, заданной параметрически: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Получим: $y'_x = \dfrac{(2\cos t^2)'}{(\sin t - 3t)'} = \dfrac{-4t\sin t^2}{\cos t - 3} = \dfrac{4t\sin t^2}{3-\cos t}$.

Задание 5. Вычислить с помощью дифференциала приближённое значение выражения $\sqrt[5]{31}$.

Решение:

Используем приближённое равенство: $\Delta f(x) \approx df(x) = f'(x)\Delta x$, верное при малых значениях Δx. Откуда: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

Преобразуем сначала исходное выражение: $\sqrt[5]{31} = \sqrt[5]{32-1} = \sqrt[5]{32(1-\dfrac{1}{32})} = 2\sqrt[5]{1-\dfrac{1}{32}}$. Положим $f(x) = \sqrt[5]{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = -\dfrac{1}{32}$. Производная равна: $f'(x) = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$, $f'(1) = 1$. Окончательно имеем: $\sqrt[5]{31} \approx 2(1 + 1\cdot(-\dfrac{1}{32})) = \dfrac{31}{16} = 1\dfrac{15}{16}$.

Задание 6. Найти вторую производную функции $y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Решение:

Сначала находим первую производную: $y' = \left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)' = \dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

Вычисляем вторую производную: $y''=\left(\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\right)'=\dfrac{-2x(x^2+1)^2-4x(1-x^2)(x^2+1)}{(x^2+1)^4}=$

$$=\frac{-2x(x^2+1)-4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3}=\frac{-2x^3+2x-4x+4x^3}{(x^2+1)^3}=\frac{2x^3-2x}{(x^2+1)^3}.$$

Задание 7. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y=\sin 2x$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{3}$.

Решение:

Запишем уравнение касательной: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. В нашем случае $f(x_0)=\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $f'(x_0)=2\cos\dfrac{2\pi}{3}=-1$. Подставляем в уравнение: $y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=x-\dfrac{\pi}{3}$, откуда $y=x-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ - уравнение касательной.

Запишем уравнение нормали: $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f(x_0)}\cdot(x-x_0)$. Подставив в это уравнение числовые данные: $y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-(x-\dfrac{\pi}{3})$, откуда $y=-x+\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ - уравнение нормали.

Задание 8. Найти производную функции $y=(\sin x)^{\sin x}$ с помощью логарифмического дифференцирования.

Решение:

Запишем общую формулу логарифмической производной: $y'=f(x)\cdot(\ln f(x))'$. В нашем случае: $y=(\sin x)^{\sin x}\Rightarrow \ln y=\ln(\sin x)^{\sin x}\Rightarrow \dfrac{y'}{y}=(\ln(\sin x)^{\sin x})'\Rightarrow y'=y\cdot(\sin x\ln\sin x)'\Rightarrow$

$$\Rightarrow y(\cos x\ln\sin x+\sin x\cdot\frac{\cos x}{\sin x})=(\sin x)^{\sin x}\cdot(\cos x\ln\sin x+\sin x\cdot ctg\, x)=(\sin x)^{\sin x+1}(\ln\sin x+ctgx)$$

Задание 9. Исследовать функцию и построить ее график: $y=\dfrac{\ln x}{x}$

Решение.

Функция определена и непрерывна в интервале (0;+∞). В граничной точке $x=0$ области определения функция имеет бесконечный разрыв, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$.

Так как в точке $x=0$ функция имеет бесконечный разрыв, то прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой. Найдем уравнение наклонной асимптоты $y=kx+b$ (если она существует).

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=0;$$

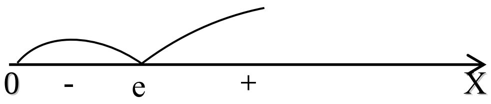
$$b=\lim_{x\to\infty}(\frac{\ln x}{x}-0\cdot x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

(При нахождении пределов воспользовались правилом Лопиталя).

Итак, $k=b=0$ и уравнение асимптоты $y=0$. Таким образом, график имеет в качестве асимптот оси координат.

Найдем производную функции и критические точки:

$y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. Стационарная критическая точка: $x = e$. Исследуем знак производной на интервалах(0;e) и (e;∞).



Составим таблицу:

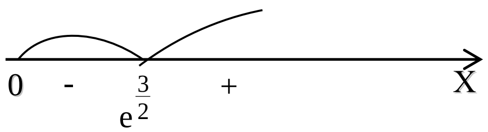
x	(0;e)	e	(e;+∞)
y`	+	0	-
y	возрастает	max	убывает

Экстремум функции: $y_{\max} = \dfrac{1}{e} \approx 0{,}37$.

Найдем вторую производную и значения *x*, при которых график может иметь точку перегиба:

$y'' = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$, $\quad y'' = 0$ при $x = e^{\frac{3}{2}}$.

Определим знак второй производной в интервалах $(0; e^{\frac{3}{2}})$ и $(e^{\frac{3}{2}}; +\infty)$:

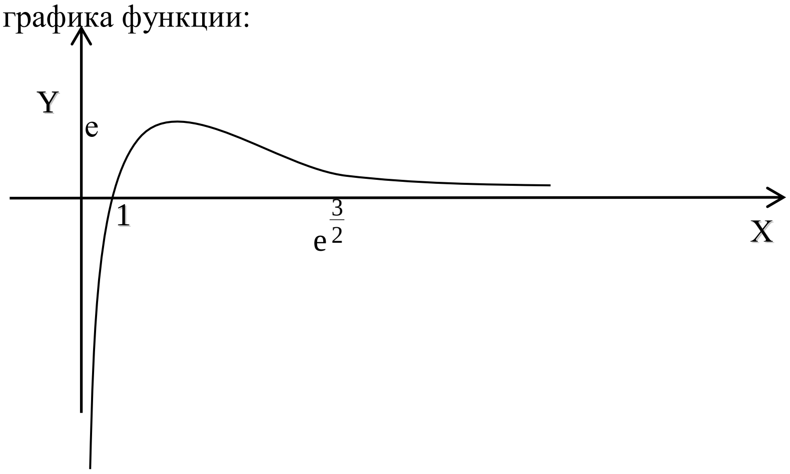


Составим таблицу:

x	$(0; e^{\frac{3}{2}})$	$e^{\frac{3}{2}} \approx 4{,}48$	$(e^{\frac{3}{2}}; \infty)$
y``	-	0	+
график	выпуклый	точка перегиба	вогнутый

$y(e^{\frac{3}{2}}) = 3/(2e^{\frac{3}{2}}) \approx 0{,}33$

График пересекает ось абсцисс в точке (1;0). Точек пересечения с осью ординат нет. Строим эскиз графика функции:



Задание 10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y=\frac{1}{3}x^3-4x+5$ на отрезке $[0;3]$.

Решение:

Найдём область определения функции: $D(f)=R$. Далее, продифференцируем функцию: $y'=(\frac{1}{3}x^3-4x+5)'=x^2-4$. Найдём критические точки: $y'=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$. Одна из них, $x=2$, принадлежит рассматриваемому промежутку. Определим значение функции в границах отрезка и в этой точке:

$y(0)=5;\ y(2)=-\frac{1}{3};\ y(3)=2$. Таким образом, $\min\limits_{[0;3]} y=-\frac{1}{3}; \max\limits_{[0;3]} y=5$.

Задание 11. Найти неопределённые интегралы:

1.1. $\int \frac{dx}{3x-1}$.

Решение. Применим способ внесения выражения под знак дифференциала: $\int \frac{dx}{3x-1}=\frac{1}{3}\int \frac{d(3x-1)}{3x-1}=\frac{1}{3}\ln|3x-1|+C$.

1.2. $\int \frac{2xdx}{x+3}$.

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\int \frac{2xdx}{x+3}=2\int \frac{x+3-3}{x+3}dx=2\int\left(1-\frac{3}{x+3}\right)dx=2\left(\int dx-3\int \frac{dx}{x+3}\right)=2x-3\ln|x+3|+C.$$

1.3. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$

Сведём данный интеграл к табличному:

$$\int \frac{dx}{2-3x^2}=\int \frac{dx}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}x)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}x)}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}\right|+C.$$

1.4. $\int \frac{\ln xdx}{x}$;

Решение. Применяем способ подстановки:

$$\int \frac{\ln xdx}{x}=\begin{bmatrix}\ln x=t,\\ dt=\frac{dx}{x}\end{bmatrix}=\int tdt=\frac{t^2}{2}+C=\frac{\ln^2 x}{2}+C.$$

.5. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Решение. Применяем способ подстановки:

$$\int \frac{2xdx}{\sqrt{1-2x^2}}=\begin{bmatrix}t=1-2x^2,\\ dt=-4xdx\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=-\sqrt{t}+C=-\sqrt{1-2x^2}+C.$$

1.6. $\int \frac{dx}{x^2-2x+4}$.

Решение. Введём подстановку $t = x-1, x = t+1, dt = dx$. Получим:

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+4} = \int \frac{dt}{(t+1)^2-2(t+1)+4} = \int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

1.7. $\int x\, arctg\, x\, dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям: $\int u dv = uv - \int v du$. В данном случае: $u = arctg\, x, dv = x\,dx, du = \frac{dx}{1+x^2}, v = \frac{x^2}{2}$. Подставляя эти выражения в формулу, получим:

$$I = \frac{x^2}{2} arctg\, x - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)} dx = \frac{x^2}{2} arctg\, x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} arctg\, x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} arctg\, x + C$$

1.8. $\int x^4 \cdot \sqrt[4]{1-3x^5}\, dx$.

Решение. Введем подстановку $t = 1-3x^5$, откуда $dt = -15x^4 dx$. Тогда $I = -\frac{1}{15}\int \sqrt[4]{t} dt$. Находим полученный табличный интеграл и возвращаемся к прежней переменной:

$$I = -\frac{1}{15}\int t^{\frac{1}{4}} dt = -\frac{1}{15} \cdot \frac{t^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + C = -\frac{4}{75}\sqrt[4]{t^5} + C = -\frac{4}{75}\sqrt[4]{(1-3x^5)^5} + C.$$

1.9. $\int \sin^3 x dx$;

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию:

$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\, dx$. Введём подстановку $\cos x = t$, тогда $dt = -\sin x dx$ и получим: $-\int (1-t^2)dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$.

1.10. $\int \cos^4 x \sin^3 dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\int \cos^4 x \sin^3 x\, dx = \int \cos^4 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x\, dx = \int \cos^4 x(1-\cos^2 x)\sin x\, dx = \int (\cos^4 x - \cos^6 x)\sin x dx$$

Введём подстановку $\cos x = t$, тогда $dt = -\sin x dx$. Получим:

$$-\int (t^4 - t^6) dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\cos^7 x}{7} + \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

Задание 12. Вычислить определённые интегралы:

2.1. $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-2x}$.

Решение.

$$\int_3^4 \frac{dx}{x^2-2x} = F(4) - F(3) = \int_3^4 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|\Bigg\|_3^4 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{3}\right) = \ln\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

2.2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos 2x dx$.

Решение.

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos 2x dx = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin 5x + \sin x) dx = \left(-\frac{\cos 5x}{5} - \cos x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -2\left(\frac{\cos\frac{5\pi}{4}}{5} + \cos\frac{\pi}{4}\right) = -2\cdot\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{5\sqrt{2}}.$$

2.3. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = F(1) - F(0) = \left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

Задание 13. Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2}.$$

Решение. Точка $x=1$ является особой точкой, поскольку подынтегральная функция имеет в ней бесконечный разрыв. Поэтому:

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{1-x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\right)\Bigg|_0^{1-\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right| - \ln 1\right) = \frac{1}{2}(-\infty - 0) = -\infty$$ - получили бесконечный предел.

Таким образом, данный интеграл расходится.

Задание 14. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = \frac{1}{x},\ y = x,\ x = 2$.

Решение. Площадь данной фигуры равна разности площадей криволинейных трапеций, образованных прямой $y = x$ и гиперболой $y = \frac{1}{x}$ на отрезке $[1;\,2]$.

$$S = \int\limits_1^2 (x - \frac{1}{x})dx = \left(\frac{x^2}{2} - \ln x\right)\Bigg|_1^2 = 2 - \ln 2 - \frac{1}{2} + 0 = 1\frac{1}{2} - \ln 2.$$

Задание 15. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$y = \sqrt{1-x^2},\ y = 0, x = 0$.

Решение. Используем формулу для нахождения объёма тел вращения: $V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

$$V = \pi\int\limits_0^1 (1-x^2)dx = \pi\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

Типовой расчет №3

«Теории вероятности и Математическая статистика»

Образец решения типового расчёта

Вариант 0

1. В ящике 10 шаров: 7 черных и 3 белых. Из ящика вынимают 5 шаров. Найти вероятность того. что среди них окажется 3 черных и 2 белых шара.

Решение.

Требуемую вероятность найдем с помощью классической формулы: $P(A)=\frac{m}{n}$

Число n - общее число возможных исходов - равно (поскольку порядок шаров безразличен) сочетанию 5 из 10 элементов: n = C_{10}^{5}

Теперь определим число благоприятных исходов т. Очевидно, что способов, которыми можно вынуть 3 черных шара из 7 и 2 белых шара из 5 равно ссоответственно: C_7^3 и C_3^2 .

Поскольку каждая комбинация черных шаров может сочетаться с любой комбинацией белых, всего получится $C_7^3 \cdot C_7^4$ способов.

Получим: P(A) = $\frac{C_7^3 \cdot C_3^2}{C_{10}^5}=\frac{\frac{7!}{3!\cdot 4!}\cdot\frac{3!}{2!\cdot 1!}}{\frac{10!}{5!\cdot 5!}}\approx 0{,}417$

Ответ: P(A) ≈ 0,42

2. Из колоды в 36 карт наугад вынимают 5 карт. Какова вероятность того, что среди них не будет карты пиковой масти?

Решение.

Как и в предыдущем случае воспользуемся формулой классического подсчета вероятностей $P(A)=\frac{m}{n}$

Очевидно, общее количество возможных исходов n равно C_{36}^{5}

Так как в колоде 27 карт не пиково» масти, то благоприятным исходом можно считать извлечение 5 любых из них. Тогда m = C_{27}^{5}

Получим: P(A) = $\frac{C_{27}^5}{C_{36}^5}=\frac{\frac{27!}{5!\cdot 22!}}{\frac{36!}{5!\cdot 31!}}\approx 0{,}214$

Ответ: *P(A)* ≈ 0,214

3. Вероятность обнаружения опечатки на странице книги равна 0,01. Найти вероятность того, что в 500-страничной книге не будет обнаружено опечаток (обнаружение опечаток на различных страницах считать независимыми событиями).

Решение.

Поскольку в условиях независимых испытаний Бернулли вероятность *p = 0,01* близка к нулю, а *n = 500* велико, применим формулу Пуассона:

$P_n(k)=\frac{a^k}{k!}e^{-a}, где\, a=500\cdot 0{,}01=5$

Для k = 0 (отсутствие опечаток), получаем: $H_{500}(0)=\frac{5^0}{0!}e^{-5}\approx 0{,}007$

Ответ: $P_{500}\approx 0{,}007$

4. Узел содержит три независимо работающие детали. Вероятность отказа деталей соответственно равны 0,1; 0,2; 0,3. Найти вероятность отказа учла, если для этого достаточно, чтобы отказала хотя бы одна деталь.

Решение.

Для нахождения вероятности события А - отказа узла, найдем сначала вероятность противоположного события P(Ā), заключающегося в исправной работе всех деталей:

$P(\bar{A}) = (1-0,1)\cdot(1-0,2)\cdot(1-0,3) = 0,9\cdot0,8\cdot0,7 = 0,504.$

Искомая вероятность равна:

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1-0,504 = 0,496$

Ответ: $P(A) \approx 0,496$

5. Монета бросается пять раз. Найти вероятность того, что орел выпадет 2 раза.

Решение.

По формуле Бернулли при n = 5, p = 0,5 найдем искомую вероятность:

$$P_5(2) = C_5^2 0,5^2(1-1,5)^3 = \frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot 0,5^5 \approx 0,01$$

Ответ: $P_2(2) \approx 0,01$

6. Два завода производят детали, поступающие в магазин. Вероятность выпуска бракованной детали для первого завода равна 0,8, для второго - 0,7. С первого завода поступило в 3 раза больше деталей, чем со второго. Покупатель приобрел годную деталь. Найти вероятность того, что она с первого завода.

Решение.

Этот пример решим по формуле Байеса:

$$P_A(H_1) = \frac{P_{H_1}(A)\cdot P(H_1)}{P_{H_1}(A)\cdot P(H_1) + P_{H_2}(A)\cdot P(H_2)}$$

Где события (гипотезы) H_1 и H_2 - произвольно выбранная соответственно первом или втором заводе деталь; событие А заключается в том, что деталь годная. Получим:

$$P_A(H_1) = \frac{0,8\cdot\frac{3}{4}}{0,8\cdot\frac{3}{4} + 0,7\cdot\frac{1}{4}} \approx 0,77$$

Ответ: $P_A \approx 0,77$

7. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, заданной законом распределения:

X	- 1	2	4
p	0,2	0,3	0,5

Решение.

Сначала найдём математическое ожидание по формуле:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$$M(X) = -1\cdot 0,2 + 2\cdot 0,3 + 4\cdot 0,5 = -0,2 + 0,6 + 2 = 2,4$$

Дисперсию вычислим по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Чтобы найти $M(X^2)$, составим закон распределения для X^2 в виде таблицы:

X	1	4	16
p	0,2	0,3	0,5

Тогда $M(X^2) = 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}3 + 16 \cdot 0{,}5 = 0{,}2 + 1{,}2 + 8 = 9{,}4$.

Получим: $D(X) = 9{,}4 - 2{,}4^2 = 9{,}4 - 5{,}76 = 3{,}64$.

Находим среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{3{,}64} \approx 1{,}9$.

Ответ: $M(X) = 2{,}4,\ D(X) = 3{,}64,\ \sigma(X) \approx 1{,}9$.

8. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, & -1 < x \le \frac{1}{3}; \\ 1, & x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения случайной величины; б) вероятность того, что в результате испытания величина примет значение, заключённое в интервале $(0, \frac{1}{3})$.

Решение.

а) Воспользуемся тем, что плотность распределения является производной от функции распределения: $f(x) = F'(x)$. Получим:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ \frac{3}{4}, & -1 < x \le \frac{1}{3}; \\ 0, & x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

б) Вероятность того, что случайная величина примет значение из некоторого интервала равна приращению её функции распределения на этом интервале:

$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

В нашем случае:

$P(0 < X < \frac{1}{3}) = F(\frac{1}{3}) - F(0) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

9. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \cos x, & 0 < x \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Решение.

Используем формулу:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Получим:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \sin x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Задание 10.

Приведены результаты тестирования студентов по математике (ответы на 50 вопросов программы). Требуется:

1. Построить интервальные статистические ряды распределения частот и относительных частот (частостей) наблюдаемых значений;
2. Найти размах вариации и разбить его на 9 интервалов;
3. Построить гистограмму и полигон относительных частот, кумуляту. Указать, графикам каких функции в теории вероятностей они соответствуют;
4. Найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график;
5. Вычислить числовые характеристики ряда распределения: выборочную среднюю, выборочные моду M_0^* и медиану M_e^*, выборочную дисперсию s^2 , выборочное среднее квадратичное отклонение s и выборочный коэффициент вариации V_s^*. Вычислить выборочные начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно, а также выборочные коэффициент асимметрии A_c^* и эксцесса $E_к^*$;
6. Рассчитать теоретическую нормальную кривую распределения и построить ее на эмпирическом графике;
7. Приняв в качестве нулевой гипотезы H_0 (генеральная совокупность, из которой извлечена выборка, имеет нормальное распределение), проверить гипотезу, пользуясь критерием согласия Пирсона (χ^2) при уровне значимости $\alpha = 0{,}025$;
8. Найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратичного отклонения.

Исходные выборочные данные

43	**49**	**25**	**22**
28	**36**	**36**	**28**
45	**21**	**48**	**49**
29	**25**	**31**	**23**
31	**40**	**35**	**32**
18	**26**	**43**	**33**
36	**25**	**38**	**27**
39	**33**	**26**	**43**
32	**34**	**35**	**35**
44	**21**	**31**	**37**

Решение:

1) Минимальное значение признака x_{min} = 18 вопросов., максимальное - x_{max} = 49 вопросов. Для определения границ интервалов находим шаг интервала: h = $\frac{x_{max} - x_{min}}{9}$. Шаг

интервала округляем

$h = \frac{49-18}{9} = \frac{31}{9} \approx 4.$

Принимаем, что интервалы включают правую границу.

2) Для составления интервального распределения составим таблицу. В первой строке расположим в порядке возрастания интервалы, длина каждого из которых h=4. Во второй строке запишем количество значений признака в выборке, попавших в этот интервал (т.е. сумму частот вариант, попавших в соответствующий интервал). Интервальный статистический ряд таков:

(x_i, x_{i+1})	16–20	20–24	24–28	28–32	32–36	36-40	40-	44-48	48-52
n_i	1	4	6	6	8	6		2	3

Объем выборки n=1 +4+6+6+8+6+ 4+2 +3=40.

Распределение относительных частот .

(x_i, x_{i+1})	16–20	20–24	24–28	28–32	32–36	36-40	40-44	44-48	48-52
n_i/n	0,025	0,1	0,15	0,15	0,2	0,15	0,1	0,05	0,075

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладываем частичные интервалы; на каждом из них строим прямоугольники высотой $\frac{n_i}{n}$

Дискретный ряд распределения

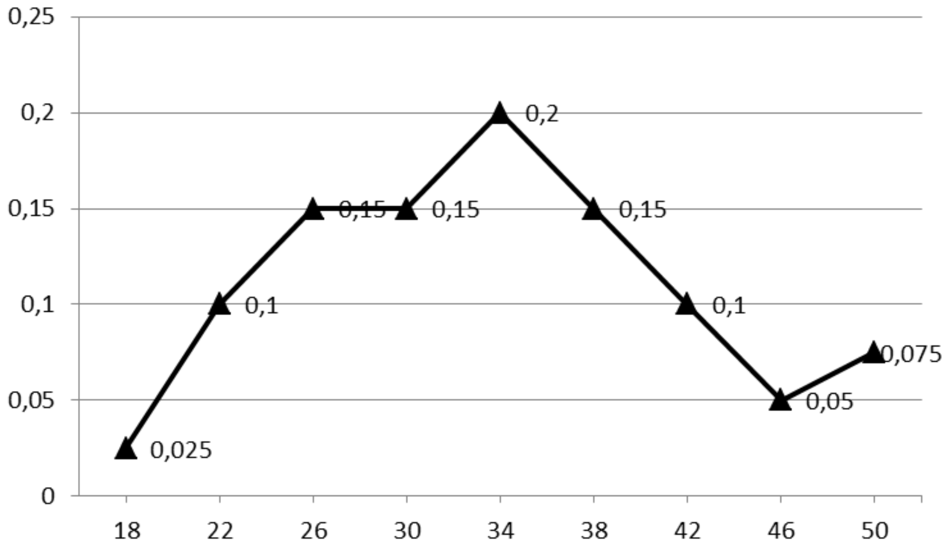
(x_i, x_{i+1})	16–20	20–24	24–28	28–32	32–36	36-40	40-44	44-48	48-52
n_i/n	0,025	0,1	0,15	0,15	0,2	0,15	0,1	0,05	0,075

Для построения полигона частот по оси абсцисс откладываем середины интервалов, по оси ординат относительные частоты

Накопленные частоты

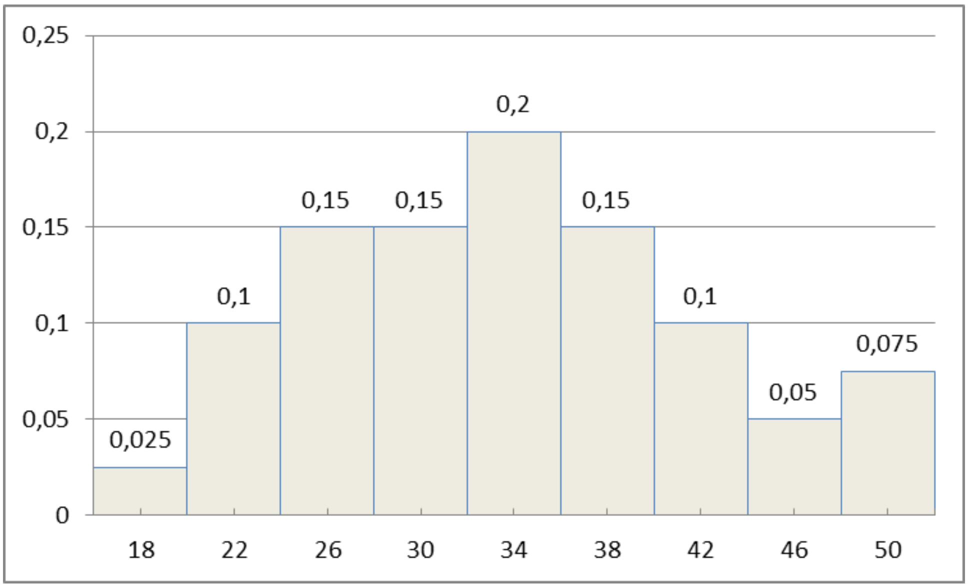
x_i	18	22	26	30	34	38	42	46	50
n_i	1	5	11	17	25	31	35	37	40
n_i/n	0,025	0,125	0,275	0,425	0,625	0,775	0,875	0,925	1

3) **Полигон** относительных частот соответствует графику плотности распределения, кумулята соответствует функции распределения

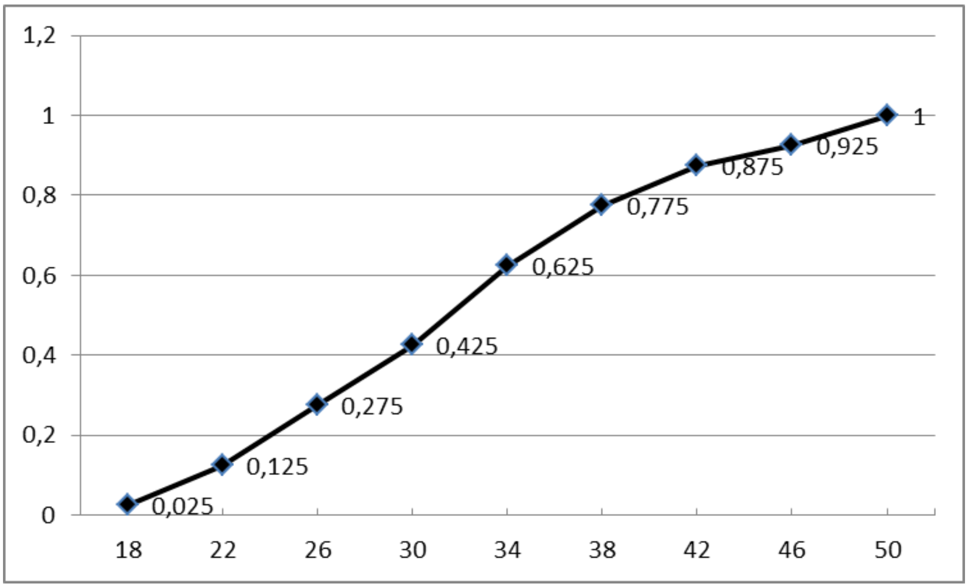


Полигон относительных частот

4) **Гистограмма и кумулята** относительных частот соответствует графику плотности распределения, кумулята соответствует функции распределения



Гистограмма относительных частот



Кумулята

5) **Эмпирической функцией** распределения (функцией распределения выборки) называют функцию F^*(x), определяющую для каждого значения x относительную частоту события X<x

$F^*(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{n_x}}{\mathrm{n}}$, число вариант ,меньших x, n - объем выборки

Если x≤ 18 то $\mathrm{F}(x)$ =0;

Если $18 <$x≤ 22 то $\mathrm{F}(x)$ =0, 0,025;

Если $22 <$x≤ 26 то $\mathrm{F}(x)$ =0, 125;

Если $26 <$x≤ 30 то $\mathrm{F}(x)$ =0, 275;

Если $30 <$x≤ 34 то $\mathrm{F}(x)$ =0,425;

Если $34 <$x≤ 38 то $\mathrm{F}(x)$ =0,625;

Если $38 <$x≤ 42 то $\mathrm{F}(x)$ =0,775;

Если $42 <$x≤ 46 то $\mathrm{F}(x)$ =0,875;

Если $46 <$x≤ 50 то $\mathrm{F}(x)$ =0,925;

Если x> 50 то $\mathrm{F}(x) = 1$;

Строим график функции

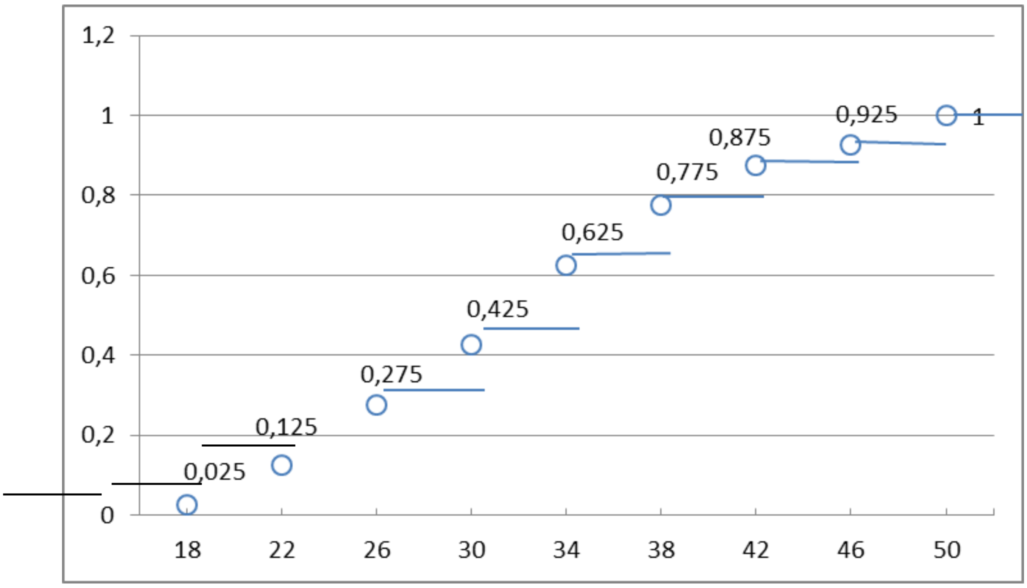


График эмпирической функции распределения

5) Мода $x_{мо}$ - значение признака с наибольшей частотой;

Медиана $x_{ме}$ значение признака, расположенного в середине ряда распределения. Мода и медиана являются структурными (распределительными) средними.

Для определения моды сначала находят интервал с наибольшей частотой $n_{мо}$= 8. В этом интервале число правильных ответов 32-36. Точное значение моды $x_{мо}$ находят путем интерполяции по формуле

$$x_{мо} = x_o + h\frac{n_{мо} - n_{мо-1}}{2n_{мо} - n_{мо-1} - n_{мо+1}}$$

Где h - шаг интервала, $n_{мо-1}$- частота предмодального интервала, $n_{мо+1}$ - частота постмодального интервала.

$$x_{мо} = x_o + h\frac{n_{мо} - n_{мо-1}}{2n_{мо} - n_{мо-1} - n_{мо+1}} = 32 + \ 4\frac{8 - \ 6}{16 - 6 - \ 6}$$

$= 32 + \frac{2}{4}\cdot 4=34$

Значение медианы $x_{ме}$также определяем путем интерполяции по формуле

$$x_{ме} = x_o + h\frac{\frac{n}{2} - S_{ме-1}}{n_{ме}}.$$

$S_{ме-1}$ - накопленные частоты интервалов, предшествующих меданному.

$n_{ме}$ - локальная частота интервала, в котором находятся единицы совокупности, делящие ряд пополам, x_o – начало медианного интервала.

$\frac{n}{2} = \frac{40}{2} = 20$, следовательно медианным является интервал с накопленной частотой 20, его частота составляет $n_{ме}$ =10, $S_{ме-1}$=17.

$$x_{ме} = x_o + h\frac{\frac{n}{2} - S_{ме-1}}{n_{ме}} = 32 + 4\cdot\frac{20-17}{8} = 32 + 0{,}375\cdot 4=33{,}5$$

x_i	18	22	26	30	34	38	42	46	50
n_i	1	5	11	17	25	31	35	37	40

Найдем методом произведений выборочные: среднюю, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, начальные и центральные моменты до четвертого порядка включительно.

Составляем таблицу:

Таблица 1

x_i	n_i	u_i	n_iu_i	$n_iu_i^2$	$n_iu_i^3$	$n_iu_i^4$	$n_i(u_i+1)^4$
18	1	-4	-4	16	-64	256	81
22	4	-3	-12	36	-108	324	64
26	6	-2	-12	24	-48	96	6
30	6	-1	-6	6	-6	6	0
34	8	0	0	0	0	0	8
38	6	1	6	6	6	6	96
42	4	2	8	16	32	64	324
46	2	3	6	18	54	162	512
50	3	4	12	48	192	768	1875
$\sum$	n=40		$\sum n_iu_i$ = -2	$\sum n_iu_i^2$=170	$\sum n_iu_i^3 = 58$	$\sum n_iu_i^4 = 1682$	$n_i(u_i+1)^4 = 296$

В качестве ложного нуля принимаем С= 34– варианта с наибольшей частотой 10 и находящаяся в середине вариационного ряда. Шаг выборки h=4. Тогда условные варианты определяются по формуле

$u_i = \frac{x_i - C}{h} = \frac{x_i - 34}{4}$.

Подсчитываем все варианты u_i и заполняем все столбцы.

Последний столбец служит для контроля вычислений по тождеству:

$\sum n_i(u_i+1)^4 = \sum n_iu_i^4 + 4\sum n_iu_i^3 + 6\sum n_iu_i^2 + 4\sum n_iu_i + n = 1682 + 4 \cdot 58 + 6 \cdot 170 + 4 \cdot (-2) + 40 = 2966$.

Вычисления произведены верно. Найдем условные начальные моменты.

$M_1^* = \frac{\sum n_iu_i}{n} = \frac{-2}{40} = -0{,}05.\ M_2^* = \frac{\sum n_iu_i^2}{n} = \frac{170}{40} = 4{,}25.$

$M_к^* = \frac{\sum n_iu_i^к}{n}$ - условные начальные моменты к- го порядка

Вычисляем выборочную среднюю:

$\bar{x}_в = M_1^* \cdot h + C = \frac{-2}{40} \cdot 4 + 34 = 33{,}8.$

Находим выборочную дисперсию:

$D_в = [M_2^* - (M_1^*)^2] \cdot h^2 = [4{,}25 - (-0{,}05)^2] \cdot 4^2 = 4{,}2475 \cdot 16 = 67{,}96.$

Определяем выборочное среднее квадратическое отклонение:

$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{67{,}96} = 8{,}2437.$

$m_3 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3 n_i}{\sum n_i}.\ m_4 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4 n_i}{\sum n_i}$ центральные эмпирические моменты третьего и четвертого порядков.

Эти моменты в случае равноотстоящих вариант с шагом h вычисляются по формулам:

$m_3 = [M_3^* - 3M_1^*M_2^* + 2(M_1^*)^3]h^3$

$m_4 = [M_4^* - 4M_1^*M_3^* + 6(M_1^*)^2M_2^* - 3(M_1^*)^4]h^4$

Ассиметрия и эксцесс определяются равенствами: $a_s = m_3/\sigma_B^3,\ e_k = \frac{m_4}{\sigma_B^4} - 3$

$M_3^* = \frac{\sum n_iu_i^3}{40} = \frac{58}{40} = 1{,}45,$

$M_4^* = \frac{\sum n_i u_i^4}{40} = \frac{1682}{40} = 42{,}05,$

$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{-2}{40} = -0{,}05.$ $M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} = \frac{170}{40}$ = 4, 25.

$m_3 = [M_3^* - 3M_1^*M_2^* + 2(M_1^*)^3]h^3$=$[1{,}45 - 3\cdot(-0{,}05)\cdot 4{,}25 + 2(-0{,}05)^3]4^3$= 2,08725$\cdot$ 64 = 133,584

$m_4 = [M_4^* - 4M_1^*M_3^* + 6(M_1^*)^2M_2^* - 3(M_1^*)^4]h^4$=
$[42{,}05 - 4\cdot(-0{,}05)\cdot 1{,}45 + 6\cdot(-0{,}05)^2\cdot 4{,}25 - 3(-0{,}05)^4]4^4$=42,4$\cdot$ 256= 10855,3552

Коэффициент вариации находим по формуле:

$\upsilon = \frac{\sigma}{\bar{x}}\cdot$ 100%. $\upsilon = \frac{8{,}2437}{33{,}8}\cdot$ 100% =24, 39 %.

$$a_s = \frac{m_3}{\sigma_B^3} = \frac{133{,}584}{8{,}2437^3} = 0{,}2384$$

$$e_k = \frac{m_4}{\sigma_B^4} - 3 = \frac{10855{,}3552}{8{,}2437^4} - 3 = 2{,}35 - 3 = -0{,}65$$

6. **Строим нормальную кривую.**

Для облегчения вычислений все расчеты сводим в таблицу 2

Таблица 2.

x_i	n_i	$x_i - \bar{x}_в$ = $x_i - 33{,}8$	$u_i = \frac{x_i - \bar{x}_в}{\sigma_B} = \frac{x_i - 33{,}8}{8{,}2437}$	$\varphi(u_i)$	n_i'= 19, 4$\cdot$ $\varphi(u_i)$
18	1	-15,8	-1,91654	0,0644	1,24936$\cong 1$
22	4	-11,8	-1,43134	0,1435	2,7839$\cong 3$
26	6	-7,8	-0,94614	0,2565	4,9761$\cong 5$
30	6	-3,8	-0,46094	0,3589	6,96266$\cong 7$
34	8	0,2	0,02426	0,3989	7,73866$\cong 8$
38	6	4,2	0,50946	0,3521	6,83074$\cong 7$
42	4	8,2	0,99466	0,2444	4,74136≅5
46	2	12,2	1,47986	0,1334	2,58796$\cong 3$
50	3	16,2	1,96506	0,058	1,1252$\cong 1$
	n=40				n=40

Заполняем первые три столбца.

В четвертом столбце записываем условные варианты по формуле, указанной в «шапке» таблицы. В пятом столбце находим значения функции $\varphi(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{u_i^2}{2}}$.

Функция $\varphi(u_i)$ четная ,т.е. $\varphi(u_i) = \varphi(-u_i)$.Значения функции $\varphi(u_i)$ в зависимости от аргумента u_i(берутся положительные u_i, т.к. $\varphi(u_i)$ четная) находим из таблицы.

Теоретические частоты теоретической кривой находим по формуле

n_i'=n$\cdot$ p_i,

где p_i - вероятность попадания X в i-частичный интервал с концами $x_i - \frac{h}{2}$ и $x_i + \frac{h}{2}$.

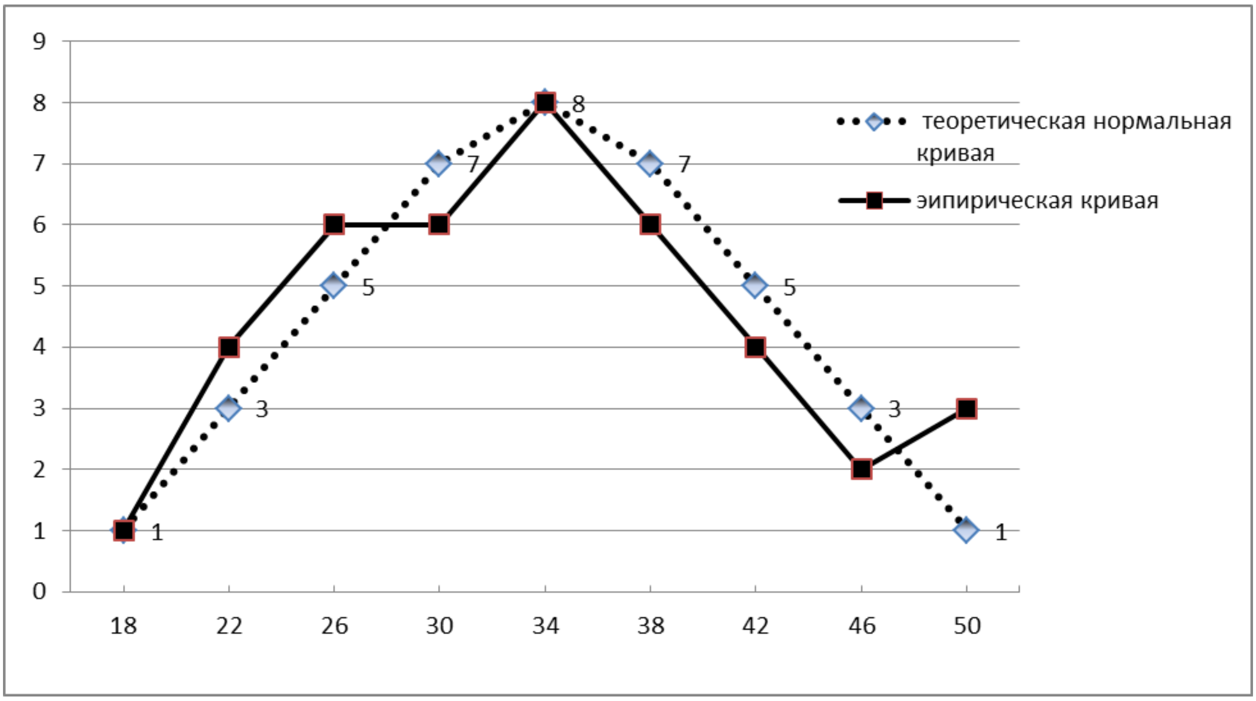
Приближенно вероятности могут быть найдены по формуле $p_i = \frac{h}{\sigma_B}\ \varphi(u_i)$.

Тогда теоретические частоты равны равны

n_i'=n$\cdot$ $\frac{h}{\sigma_B}\ \varphi(u_i)$= $\frac{40\cdot 4}{8{,}2437}\ \varphi(u_i)$ = 19, 4$\cdot$ $\varphi(u_i)$.

Заполняем последний столбец. В последнем столбце частоты n_i' округляются до целого числа и $\sum n_i'$= $\sum n_i$ =40.

В системе координат $(x_i; y_i = n_i')$ строим нормальную (теоретическую кривую)кривую по выравнивающим частотам n_i' и полигон наблюдаемых частот n_i. Полигон наблюдаемых частот построен в системе координат $(x_i; y_i = n_i)$.



7. **Проверяем гипотезу** о нормальности X при уровне значимости α=0,05.

В качестве статистики θ выбирают СВ χ^2:

χ^2=$\sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$.

Она подчиняется распределению χ^2 с числом степеней свободы $\nu = s - r - 1$, где s - число различных значений x_i; r - число параметров, откоторых зависит распределение. Для нормального закона таких параметров два: a=$\bar{x}_в = M(x)$ и $\sigma = s = \sqrt{D_B \cdot \frac{n}{n-1}}$, т.е. $r = 2$, и $\nu = s - 3$. По данному уровню значимости α и числу степеней свободы ν в таблице распределения χ^2 находят критическое значение $\chi^2_{крит.}$ и находят критическую область:

$\chi^2 < \ \chi^2_{крит.}$, ω_0= $\{\chi^2 : \chi^2 \geq \ \chi^2_{крит.}\}$. Затем вычисляем наблюдаемое значение χ^2, т.е. $\chi^2_{набл.}$ по формуле

$\chi^2_{набл.} = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$.

Если окажется, что $\chi^2_{набл.} < \ \chi^2_{крит.}$, то нулевую гипотезу H_0 о том ,что X имеет нормальное распределение, принимают. В этом случае опытные данные хорошо согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

Вычислим $\chi^2_{\text{набл.}}$, для чего составим расчетную таблицу 3.

Таблица 3

1	2	3	4	5	6	7
n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n_i'}$
1	1	0	0	0	1	1
4	3	1	1	0,333333	16	5,333333
6	5	1	1	0,2	36	7,2
6	7	-1	1	0,142857	36	5,142857
8	8	0	0	0	64	8
6	7	-1	1	0,142857	36	5,142857
4	5	-1	1	0,2	16	3,2
2	3	-1	1	0,333333	4	1,333333
3	1	2	4	4	9	9
	n=40			$\chi^2_{\text{набл.}}$= 5,352381		45,35238

Суммируя числа пятого столбца, получаем $\chi^2_{\text{набл.}}$= 5,352381

Суммируя числа последнего столбца, получаем 45,35238

Контроль: $\chi^2_{\text{набл.}}$=5,352381

$\sum \frac{n_i^2}{n_i'}$ - $\sum n_i$= 45,35238-40=5,352381

Совпадение результатов подтверждает правильность вычислений.

Найдем число степеней свободы, учитывая, что число групп выборки (число различных вариантов) 7, $\nu = s - 3$=9-3=6.

По таблице критических точек распределения χ^2, по уровню значимости $\alpha = 0.025$ и числу степеней свободы ν =6 находим $\chi^2_{\text{крит.}} = 14{,}4$.

Так как $\chi^2_{\text{набл.}} < \chi^2_{\text{крит.}}$,то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Расхождение эмпирических и теоретических частот незначимое. Следовательно, данные наблюдений согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

8.**Найдем доверительный интервал** для оценки неизвестного математического ожидания, полагая, что X имеет нормальное распределение, среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sigma_X = \sigma_B$ = 8,2437и доверительную вероятность $\gamma = 0{,}95$.

Известен объем выборки: n=40, выборочная средняя $\bar{x}_в = 3$3,8.

Из соотношения $2\Phi(t) = \gamma$ получим $\Phi(t)$ =0,475. По таблице находим параметр t=1,96.

Найдем точность оценки

$\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}96 \cdot 8{,}2437}{\sqrt{40}}$= 2,55

Доверительный интервал таков:

$\bar{x}_в - \delta < M(X) < \bar{x}_в + \delta$ или $33{,}8 - 2{,}55 < M(X) < 33{,}8 + 2{,}55$ $\Leftrightarrow$ или $31{,}25 < M(X) < 36{,}35$.

Надежность $\gamma = 0{,}95$ указывает, что если произведено достаточно большое число выборок, то 95 % из них определяет такие доверительные интервалы, в которых параметр действительно заключен.

Интервальная оценка для среднего квадратического отклонения:

$s(1-q) < \sigma < s(1+q)$. q находим по таблице по заданным n и $\gamma = 0{,}95$.

$q(40; 0{,}95) = 0{,}24$

$8{,}2437 \cdot 0{,}76 < \sigma < 8{,}2437 \cdot 1{,}24;$

$6{,}26 < \sigma < 10{,}222$

3.4 Тестовые задания

По дисциплине «Математика» предусмотрено проведение письменного тестирования. Письменное тестирование проводится после изучения определенного раздела дисциплины.

– результаты тестирования учитываются при проведении промежуточной аттестации. Банк тестовых заданий содержит 10 вариантов по 12 заданий.

Пример тестового задания.

Тест№1

«Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия».

1. При каком значении x $\begin{vmatrix} 3 & 8 & -9 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & x & 2 \end{vmatrix} = 30$	1) x=0 2) x=-1 3) x=4 4) x=-2
2. Вычислить $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = ?$	1) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. 2) $\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$. 3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. 4) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.
3. Вычислить ранг матрицы А, если: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	1) 1. 2) 3. 3) 0. 4) 2.
4. Вычислить $B=A^{-1}C$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 17 & -5 \\ 24 & -17 \end{pmatrix}$.	1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 17 & 21 \end{pmatrix}$.
5. Решить систему и в ответе указать сумму решений: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 = -6 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$	1)1;2)3;3)-3;4)5;5)-1
6. При каком значении λ система совместна: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 8 \\ 4x_1 - 2x_2 = \lambda \end{cases}$	1) λ=0; 2) λ=12; 3) λ=16; 4) при любом
7. Вычислить периметр треугольника ABC, если: A(7;-3) B(12;9) C(6;1)	1) 3+$\sqrt{6}$; 2) 23+$\sqrt{17}$; 3) 24; 4)17-$\sqrt{8}$.

8. Указать прямоугольные координаты точки М с полярными координатами $(2;-\frac{\pi}{3})$	1) $(1;-\sqrt{3})$; 2) $(0;\ \frac{\pi}{3})$; 3) (4;2); 4) $(1;-\frac{\sqrt{3}}{2})$.
9. Указать уравнение прямой проходящей через точку М(1;2) и имеющий угловой коэффициент к=1	1) y=x-4; 2) y=x+1; 3) y=4x-2; 4)y=x-2.
10. Указать расположение прямых 3x+5y-9=0 и 10x-6y+4=0	1) перпендикулярны; 2)пересекаются; 3)параллельны; 4)совпадают.
11. Написать каноническое уравнение эллипса, если: 2c=8, b=3	1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$; 2) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{9}=1$; 3) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; 4) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{3}=1$.
12. Указать уравнение прямой проходящей через точки: А(1;-2;-1) и В(3;0;4)	1) $\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-6}{-1}$; 2) $\frac{x-4}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z+1}{4}$; 3) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{5}$; 4) $\frac{x-1}{6}=\frac{z}{7}$.

Тест№2

«Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

1.Найти область определения функции и в ответе указать сумму целых значений x: $y=\sqrt{4-x^2}$.	1)-1; 2)0; 3)2; 4)3.
2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{2x^2-x-1}$	1)1; 2)1/2; 3)2; 4)0
3.Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-1}{x^2-4}$	1)1; 2)0; 3)2; 4)∞
4.Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}$	1)0; 2)1; 3)-1; 4)2
5.Найти y', где y=$\cos^4 2x$	1)-8$\cos^3 2x$•sin2x, 2) 8$\sin^3 2x$•cos2x, 3)8$\sin^3 2x$, 4)-8$\sin^3 2x$, 5) -8$\sin^3 2x$•cos2x
6.Найти y', где y= x^{x^2}	1) $x^2\cdot x^{x^2-1}$,2) $2x^3\cdot x^{x^2-1}$;3) $x^{x^2}\cdot(2x\ln x+1)$; 4) $x^{x^2}\cdot(2\ln x+x)$; 5) $x^{x^2}\cdot(2x\ln x+x)$
7..Найти $y'(2)$ если $y=\sqrt{x^3+1}$	1)4; 2)0; 3)2; 4)5
8.Найти $\frac{dy}{dx}$, если $y^2=8x$	1)4/y; 2)8/x; 3)2y; 4)2/y.
9.Вычислить приближенно: $\sqrt[3]{26}$	1)3,26; 2)3; 3)2,96; 4)3,96
10.Функция $f(x)=x^2-4x+3$ имеет корни 1 и 3. Указать корень производной $f'(x)$, о котором говорится в теореме Ролля.	1)2; 2)3; 3)1; 4)5
11. Найти значение функции $y=x^2\cdot e^{2x}$ в точке максимума	1)0;2) $\frac{1}{e^2}$;3) e^2;4) $\frac{1}{e}$;5) e

12.Вычислить $\frac{2+3i}{7-4i}$	$1) i+1; 2) \frac{2}{7}-\frac{3}{4}i; 3) \frac{2}{65}+\frac{29}{65}i; 4) 6i; 5) \frac{7}{65}-\frac{4}{65}i$

Тест №3
«Теория вероятности»

1. В спортивной команде 20 спортсменов, из них 12 юношей и 8 девушек. Случайно отбирают одного человека. Какова вероятность того, что это девушка?	1. 3/5; 2.1/8; 3.2/5; 4.1
2.В коробке семь шаров: 3 красных, 4 синих. На удачу вынимаю два. Найти вероятность, что оба шара красных	$1) \frac{4}{7}; 2) \frac{3}{7}; 3) \frac{2}{7}; 4) \frac{1}{7}; 5) 1$
3.Три стрелка, независимо друг от друга делают по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого, второго и третьего стрелка соответственно равны 0,6;0,7;0,8. Определить вероятность того, что попадет только один стрелок	1)0,2;2)0,188;3)0,082;4)0,152;5)0,133
4.В магазин вошли пять покупателей. Найдите вероятность того, что три из них совершат покупки, если вероятность совершить покупку для каждого покупателя равна 0,3	1)0,1323;2)0,25;3)0,73;4)0,81;5)1,01
5.Вероятность выпуска бракованной обуви фабрикой равна 0,2. Найти вероятность того, что из 20 изделий 5 будет бракованных.	1)0,52; 2)0,19; 3)0,44; 4)0,33.
6. .Найти M(X) дискретной случайной величины X, заданной законом распределения X: 10, 25, 35 p: ?, 0,6, 0,2	1)12; 2)18; 3)24; 4)30.
7.Указать дисперсию дискретной случайной величины X, если она имеет два равновероятных возможных значения $X_1=3$ и $X_2=4$.	1)0,25; 2)0,5; 3)0,6; 4)1.
8.Вероятность появления события в каждом испытании равна 0,3. Найти среднее квадратическое дискретной случайной величины X – числа появлений события A в 100 независимых испытаниях.	1)2,21; 2)4,58; 3)9,38; 4)10,54.
9. Случайная величина X задана функцией распределения: $F(x)=\begin{cases}0, при\_x\le 1,\\ x/2, при\_1<x\le 2,\\ 1, при\_x>2.\end{cases}$ Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала(0;2).	1)0,5; 2)0,9; 3)1; 4)2.
10.Случайная величина X задана плотностью распределения f(x)=1/2x в интервале (0;2) вне этого интервала f(x)=0. Найти математическое ожидание величины X.	1)1/3; 2)1/2; 3)3/2; 4)4/3.
11.Непрерывная случайная величина X распределена нормально, с плотностью	1)3; 2)5; 3)9; 4)12.

$f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-1)^2}{8}}$.Указать сумму значений математического ожидания и среднего квадратического отклонения	
12.Случайная величина X распределена по нормальному закону, причём M(X)=10, D(x)=4.Указать P(12<X<14)	1)0,564; 2)0,136; 3)0,687; 4)0,989

3.5. Доклады

Выполнение устного доклада в полной мере раскрывает творческий подход обучающихся к самостоятельной проработке нового материала, позволяет оценить степень готовности учащихся к самостоятельному выбору актуальных проблем дисциплины. Данный вид творческой работы позволяет обучающимся овладеть навыками систематизации материала, развивает умение конкретизировать и обобщать проблемы на основе анализа массива научной и периодической литературы по выбранной теме.

Доклад оценивается по 6-балльной системе в рамках творческого рейтинга.

Рекомендуемая тематика докладов по дисциплине приведена в таблице 2.

Таблица 2

Темы докладов, рекомендуемые к написанию при изучении дисциплины «Математика»

№ п/п	Темы докладов
1	2
1	«Численные методы решения экстремальных задач»
2	Понятие о численных методах решения обыкновенных дифференциальных уравнений
3	«Метод наименьших квадратов».
4	«Математика - язык ах познания мира»
5	Применение кривых второго порядка в компьютерных систем
6	Суммирование расходящихся рядов
7	Конструктивизм и интуиционизм в математике
8	Логическое обоснование математики
9	Метод математической индукции
10	Гиперкомплексные числа
11	Бинарная система счисления.
12	Симметрии в живой природе
13	Алгебраические кривые
14	Многомерные пространства.
15	Площади и логарифмы
16	Возрастающие последовательности

№ п/п	Темы докладов
1	2
17	Динамические системы и аттракторы
18	Хаос и его математическое описание.
19	Фракталы в экономике
20	Экономические модели

3.6 Рубежный контроль

– *Цель проведения рубежного контроля – проверка уровня усвоения раздела или тем курса по дисциплине «Математика».*

– *критерии оценки рубежного контроля:*

Оценка «5» - отлично – заслуживает обучающийся, обнаруживший всестороннее, систематическое и глубокое знание вопроса, умение приводить примеры, поясняющие излагаемый материал.

Оценка «4» - хорошо - заслуживает обучающийся, обнаруживший достаточные, но неглубокие знания вопроса. Поясняющие примеры приводятся редко.

Оценка «3» - удовлетворительно – заслуживает обучающий, обнаруживший знания по основным моментам вопроса, но не раскрыв его сути.

Оценка «2» - неудовлетворительно – выставляется обучающемуся, обнаружившему пробелы в знаниях и допустившему принципиальные ошибки в изложении ответа на вопрос.

– *Вопросы рубежного контроля, рассматриваемые на контактных занятиях и выносимые на самостоятельное изучение.*

Вопросы рубежного контроля №1

Вопросы, рассматриваемые на аудиторных занятиях.

1. Вычисление определителей 2-го и 3-го порядков.
2. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения.
3. Методы вычисления определителей 2-го и 3-го порядков.
4. Матрицы. Квадратная, прямоугольная, единичная матрицы. Сложение, вычитание, умножение матрицы на число.
5. Произведение матриц. Условие, при котором возможно умножение матриц.
6. Обратная матрица.
7. Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Крамера.
8. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.
9. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
10. Различные виды уравнения прямой на плоскости.
11. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой.
12. Плоскость в пространстве. Взаимное расположение плоскостей

Вопросы для самостоятельного изучения.

1. Присоединенная матрица. Вычисление обратной матрицы с помощью присоединенной.
2. Решение систем методом обратной матрицы и методом Крамера.
3. Однородные системы линейных алгебраических уравнений и их исследование.
4. Метод координат. Декартова система координат. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении.

5. Полярная система координат. Зависимость между декартовыми н полярными координатами.
6. Формулы преобразования декартовых координат.
7. Линии второго порядка. Общее уравнение линий второго порядка и его исследование.
8. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости проходящей через данную точку с данным нормальным вектором.
9. Взаимное расположение плоскостей. Условие параллельности и перпендикулярности. Угол между плоскостями.
10. Прямая линия в пространстве. Общее и каноническое уравнения прямой линии в пространстве.
11. Взаимное расположение прямых линий в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности. Угол между прямыми.

Вопросы рубежного контроля №2

Вопросы, рассматриваемые на аудиторных занятиях.

1. Функция, область определение и область значений. Простейшие элементарные функции. Способы задания функции.
2. Предел функции. Односторонние пределы.
3. Теоремы о пределах.
4. Замечательные пределы.
5. Эквивалентные бесконечно малые. Вычисление пределов с помощью эквивалентных бесконечно малых.
6. Производная функции. Её геометрический и механический смысл.
7. Основные правила и формулы дифференцирования.
8. Сложная функция и её производная.
9. Неявная функция и её производная.
10. Параметрически заданная функция и её производная.
11. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Приложение дифференциала к приближённым вычислениям.
12. Производные и дифференциалы высших порядков.
13. Условия монотонности функции. Экстремумы функции.
14. Выпуклость, вогнутость функции. Точки перегиба.
15. Асимптоты функции (вертикальные, горизонтальные, наклонные).
16. Первообразная функция и неопределенный интеграл, его геометрический смысл.
17. Свойства неопределённого интеграла.
18. Таблица интегралов некоторых функций.
19. Метод подстановки (замены переменной) в неопределенном интеграле.
20. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
21. Интегрирование рациональных дробей.
22. Понятие определённого интеграла и его геометрический смысл.
23. Свойства определённого интеграла.
24. Формула Ньютона-Лейбница.
25. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле.
26. Приложение определённых интегралов. Вычисление площадей плоских фигур, длин дуг

Вопросы для самостоятельного изучения.

1. Понятие множества. Множество действительных и комплексных чисел.
2. Бесконечно малые, бесконечно большие последовательности и связи между ними.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их сравнение. Эквивалентные функции.
4. Арифметические операции над непрерывными функциями.
5. 1 и 2 теоремы Больцано-Коши. Теорема Вейерштрасса.
6.Понятие сложной функции и ее непрерывность.

7.Понятие обратной функции и ее непрерывность
8. Связь между дифференцируемости и существованием конечной производной
9.Правило Лопиталя.
10. Общая схема исследования функции.
11. Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа. Формулы Эйлера.
12. Возведение комплексного числа в n-ую степень и извлечение корня n-ой степени. Формулы Муавра.
13. Разложение элементарных функций по формуле Маклорена.
14. Разложение алгебраических многочленов на множители. Теорема Безу.
15. Интегрирование элементарных дробей.
16. Разложение рациональных дробей на элементарные. Метод неопределенных коэффициентов.
17. Интегрирование рациональных функций.
18. Несобственные интегралы 1-го рода.
19. Несобственные интегралы 2-го рода.
20. Простейшие приложения определенного интеграла.
21.

Вопросы рубежного контроля №3

Вопросы, рассматриваемые на аудиторных занятиях.

1. Элементы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания. Примеры.
2. Случайные события и их классификация
3. Классическое определение вероятности. Непосредственный подсчёт вероятности.
4. Понятие суммы и произведения событий
5. Несовместимые события. Теорема сложения вероятностей несовместимых событий и следствия из неё.
6. Совместные события. Теорема сложения вероятностей совместных событий
7. Независимые события. Теорема умножения вероятностей независимых событий
8. Зависимые события. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей зависимых событий
9. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли
10. Локальная и интегральная формулы Лапласа
11. Формула Пуассона, условия её применения
12. Понятие случайной величины, закон её распределения
13. Дискретная случайная величина. Ряд распределения, многоугольник разделения
14. Функция распределения F(x) и её свойства
15. Непрерывная случайная величина. Плотность распределения вероятности f(x) и её свойства. Кривая распределения.
16. Числовые характеристики дискретной и непрерывной случайных величин (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение)
17. Свойства математического ожидания и дисперсии
18. Нормальное распределение непрерывной случайной величины, определение, вид кривой Гаусса, свойства кривой.
19. Вероятность попадания нормально распределённой случайной величины в заданный интервал. Правило 3-х сигм.
20. Статистический и вариационный ряды. Варианты, частоты, относительные частоты
21. Статистическое распределение выборки. Полигон.
22. Эмпирическая функция распределения $F^{*}(x)$. Её свойства
23. Группированное статистическое распределение. Построение гистограммы
24. Числовые характеристики выборки
25. Точечные оценки числовых характеристик и их свойства
26. Точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения генеральной совокупности

27. Интервальные оценки. Доверительная вероятность и доверительный интервал
28. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном и неизвестном среднем квадратическом отклонении генеральной совокупности
29. Функциональная и корреляционная зависимости между случайными величинами
30. Основные задачи теории корреляции
31. Коэффициент корреляции и его свойства
32. Линейная корреляция. Определение параметров прямой регрессии методом квадратов.

Вопросы для самостоятельного изучения.

1. Операции над событиями.
2. Классическая вероятностная схема.
3. Элементы комбинаторики и вычисление вероятности событий. Геометрическая вероятность.
4. Теорема условная вероятность. Независимость событий. Теорема умножения вероятностей.
5. Формула полной вероятности.
6. Формула Бейеса.
7. Вероятность событий в схеме Бернулли.
8. Локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа.
9. Функция распределения и ее свойства.
10. Ряд распределения, полигон и функция распределения дискретной случайной величины.
11. Плотность распределения и функция распределения непрерывной случайной величины.
12. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение дискретной и непрерывной случайной величины.
13. Распределения дискретных случайных величин: биномиальное, Пуассона. Их числовые характеристики.
14. Равномерное и показательное распределения, их числовые характеристики.
15. Нормальное распределение и его числовые характеристики.
16. Понятие об интервальном оценивании. Доверительная вероятность, доверительный интервал.
17. Статистическая гипотеза, статистический критерий.
18. Уровень значимости и мощность критерия.
19. Построение теоретического закона распределения по опытным данным.
20. Понятие о критериях согласия.
21. Критерий Пирсона χ^2 и схема его применения.
22. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.
23. Основные задачи теории корреляции.
24. Линейная регрессия. Уравнения регрессии.
25. Коэффициент корреляции: оценка тесноты и вида связи между признаками X и Y.

3.7 Промежуточная аттестация

В соответствии с учебным планом по направлению подготовки 36.03.02 Зоотехния промежуточная аттестация в первом семестре проходит в видез ачета.

Целью проведенияпромежуточной аттестации -зачета является комплексная и объективная оценка качества усвоения обучающимися теоретических знаний, умения систематизировать полученные знания и применять их к решению практических задач, уровня сформированности компетенций при освоении дисциплины «Математика».

Тематика вопросов, выносимых на зачет
1-ый семестр

1. Вычисление определителей 2-го и 3-го порядков.
2. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения.
3. Методы вычисления определителей 2-го и 3-го порядков.
4. Матрицы. Квадратная, прямоугольная, единичная матрицы. Сложение, вычитание, умножение матрицы на число.
5. Произведение матриц. Условие, при котором возможно умножение матриц.
6. Обратная матрица.
7. Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Крамера.
8. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.
9. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
10. Прямоугольная и полярная системы координат на плоскости. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости.
11. Различные виды уравнения прямой на плоскости.
12. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой.
13. Кривые второго порядка
14. Плоскость в пространстве. Взаимное расположение плоскостей
15. Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости.
16. Функция, область определение и область значений. Простейшие элементальные функции. Способы задания функции.
17. Предел функции. Односторонние пределы.
18. Теоремы о пределах.
19. Замечательные пределы.
20. Эквивалентные бесконечно малые. Вычисление пределов с помощью эквивалентных бесконечно малых.
21. Непрерывность функции в точке и на множестве точек. Теоремы о непрерывных функциях.
22. Точки разрыва функции и их квалификация.
23. Теоремы о функциях, непрерывных на отрезке.
24. Производная функции. Её геометрический и механический смысл.
25. Основные правила и формулы дифференцирования.
26. Сложная функция и её производная.
27. Неявная функция и её производная.
28. Параметрически заданная функция и её производная.
29. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Приложение дифференциала к приближённым вычислениям.
30. Производные и дифференциалы высших порядков.
31. Теорема Роля, Лагранжа, Коши.
32. Правило Лопиталя.
33. Формула Тейлора.
34. Условия монотонности функции. Экстремумы функции.
35. Выпуклость, вогнутость функции. Точки перегиба.
36. Асимптоты функции (вертикальные, горизонтальные, наклонные).
37. Первообразная функция и неопределенный интеграл, его геометрический смысл.
38. Свойства неопределённого интеграла.
39. Таблица интегралов некоторых функций.
40. Метод подстановки (замены переменной) в неопределенном интеграле.

41. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
42. Интегрирование рациональных дробей.
43. Понятие определённого интеграла и его геометрический смысл.
44. Свойства определённого интеграла.
45. Формула Ньютона-Лейбница.
46. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле.
47. Несобственные интегралы 1-го рода.
48. Несобственные интегралы 2-го рода.

49. Элементы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания. Примеры.
50. Случайные события и их классификация
51. Относительная частота случайного события и статистическое определение вероятности
52. Классическое определение вероятности. Непосредственный подсчёт вероятности.
53. Понятие суммы и произведения событий
54. Несовместимые события. Теорема сложения вероятностей несовместимых событий и следствия из неё.
55. Совместные события. Теорема сложения вероятностей совместных событий
56. Независимые события. Теорема умножения вероятностей независимых событий
57. Зависимые события. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей зависимых событий
58. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли
59. Локальная и интегральная формулы Лапласа
60. Формула Пуассона, условия её применения
61. Понятие случайной величины, закон её распределения
62. Дискретная случайная величина. Ряд распределения, многоугольник разделения
63. Функция распределения F(x) и её свойства
64. Непрерывная случайная величина. Плотность распределения вероятности f(x) и её свойства. Кривая распределения.
65. Числовые характеристики дискретной и непрерывной случайных величин (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение)
66. Свойства математического ожидания и дисперсии
67. Биномиальное распределение дискретной случайной величины, его числовые характеристики
68. Равномерное распределение непрерывной случайной величины, его числовые характеристики
69. Нормальное распределение непрерывной случайной величины, определение, вид кривой Гаусса, свойства кривой.
70. Вероятность попадания нормально распределённой случайной величины в заданный интервал. Правило 3-х сигм
71. Генеральная и выборочная совокупность. Выборочный метод. Повторная, бесповторная, репрезентативная выборки
72. Статистический и вариационный ряды. Варианты, частоты, относительные частоты
73. Статистическое распределение выборки. Полигон.
74. Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$. Её свойства
75. группированное статистическое распределение. Построение гистограммы
76. Числовые характеристики выборки
77. Точечные оценки числовых характеристик и их свойства
78. Точечные оценки математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения генеральной совокупности
79. Интервальные оценки. Доверительная вероятность и доверительный интервал
80. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном и неизвестном среднем квадратическом отклонении генеральной совокупности

81. Функциональная и корреляционная зависимости между случайными величинами
82. Основные задачи теории корреляции
83. Коэффициент корреляции и его свойства
84. Линейная корреляция. Определение параметров прямой регрессии методом квадратов.

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

4.1 Процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Контроль результатов обучения студентов, этапов и уровня формирования компетенций по дисциплине «Математика» осуществляется через проведение входного, текущего, рубежных, выходного контролей и контроля самостоятельной работы

Формы текущего, промежуточного и итогового контроля, порядок начисления баллов и фонды контрольных заданий для текущего контроля разрабатываются кафедрой исходя из специфики дисциплины, и утверждаются на заседании кафедры.

4.2 Критерии оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности,характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

4.2.1. Критерии оценки устного ответа при промежуточной аттестации

При ответе на вопрос обучающийся демонстрирует:

знания: основные понятия и методы интегрального исчисления, теории вероятности, математической статистики;

умения: применять изученные понятия и методы интегрального исчисления, теории вероятности, математической статистики для решения типовых задач*;*

владение навыками: математическими методами в решении задач, возникающих в профессиональной практике и научно-исследовательской деятельности

Критерии оценки**

отлично	обучающийся демонстрирует: – знание материала (методов линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального исчисления в понятиях и методах теории функций многих переменных и дифференциальных уравнений; теории вероятностей и математической статистики), практики применения материала,

	исчерпывающе и последовательно, четко и логично излагает материал, хорошо ориентируется в материале, не затрудняется с ответом при видоизменении заданий; – умение *решать задачи по математическому анализу, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, в понятиях и методах теории функций многих переменных и дифференциальных уравнений;* теории вероятностей и математической статистики), используя современные методы и показатели такой оценки; –
хорошо	обучающийся демонстрирует: – знание материала, не допускает существенных неточностей; – в целом успешное, но содержащие отдельные пробелы, умение (указываются конкретные умения в зависимости от специфики дисциплины), используя современные методы и показатели такой оценки; – в целом успешное, но содержащее отдельные пробелы или сопровождающееся отдельными ошибками владение навыками методы и приемы линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального исчисления,)
удовлетворительно	обучающийся демонстрирует: – знания только основного материала, но не знает деталей, допускает неточности, допускает неточности в формулировках, нарушает логическую последовательность в изложении программного материала; – в целом успешное, но не системное умение (применять приемы и методы линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального исчисления для решения учебных задач), используя современные методы и показатели оценки оценки в зависимости от специфики дисциплины); –
неудовлетворительно	обучающийся: – не знает значительной части программного материала, плохо ориентируется в материале (линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального исчисления для решения учебных задач), не знает практику применения материала, допускает существенные ошибки; – не умеет использовать методы и приемы (линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, дифференциального исчисления, теории вероятностей и математической статистики для решения учебных задач), допускает существенные ошибки,

	неуверенно, с большими затруднениями выполняет самостоятельную работу, большинство заданий, предусмотренных программой дисциплины, не выполнено; -

4.2.2. Критерии оценки доклада

Критериями оценки доклада являются: новизна материала, обоснованность выбора источников литературы, степень раскрытия сущности вопроса,

При устном докладе обучающийся демонстрирует:

знания: теоретического материала для раскрытия сущности вопроса, источников литературы;

умения: раскрыть сущность изучаемого вопроса;

владение навыками: анализа и выводов изучаемой проблемы.

Критерии оценки устного доклада

отлично	обучающийся демонстрирует: - знание материала (материал систематизирован и структурирован; сделаны обобщения и сопоставления различных точек зрения по рассматриваемому вопросу, сделаны и аргументированы основные выводы, отчетливо видна самостоятельность суждений, основные понятия проблемы изложены полно и глубоко) - грамотность и культура изложения; - дает правильные ответы на вопросы аудитории при презентации доклада
хорошо	обучающийся демонстрирует: - знание материала (материал систематизирован и структурирован; сделаны обобщения и сопоставления различных точек зрения по рассматриваемому вопросу, сделаны и аргументированы основные выводы) - дает неточные ответы на вопросы аудитории при презентации доклада
удовлетворительно	обучающийся демонстрирует: - неполное знание материала (в материале представлена одна точка зрения, отсутствует самостоятельность суждений) - не отвечает на вопросы аудитории при презентации доклада
неудовлетворительно	обучающийся: - не выполнил доклад

4.2.3. Критерии оценки выполнения контрольных (самостоятельных) работ

При выполнении контрольных (самостоятельных) работ обучающийся демонстрирует:

знания: теоретического материала по изученной теме или разделу**;**

умения: применять теоретический материал для решения учебных задач;

владение навыками: математическими методами в решении задач, возникающих в профессиональной практике и научно-исследовательской деятельности

Критерии оценки выполнения контрольных (самостоятельных) работ

отлично	обучающийся демонстрирует: – полностью выполненную работу; в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок; в решении нет ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала);
хорошо	обучающийся демонстрирует: – полностью выполненную работу, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки); допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).
удовлетворительно	обучающийся демонстрирует: – работу, где допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но студент владеет обязательными умениями.
неудовлетворительно	обучающийся: – допустил принципиальные ошибки в выполнении заданий, показавшие, что студент не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

4.

4.2.4. Критерии оценки выполнения типовых расчетов

При выполнении типовых расчетов обучающийся демонстрирует:

знания: теоретического материала по изученной теме или разделу**;**

умения: применять теоретический материал для решения учебных задач;

владение навыками: в решении задач, возникающих в профессиональной практике и научно-исследовательской деятельности

Критерии оценки выполнения типовых расчетов

отлично	обучающийся демонстрирует: – полностью выполненную работу; в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок; в решении нет ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала);
хорошо	обучающийся демонстрирует: – полностью выполненную работу, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки); допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).

удовлетворительно	обучающийся демонстрирует: – работу, где допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но студент владеет обязательными умениями.
неудовлетворительно	обучающийся: – допустил принципиальные ошибки в выполнении заданий, показавшие, что студент не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

4.2.5. Критерии оценки для письменного опроса

При письменном опросе обучающийся демонстрирует:

знания: теоретического материала для решения ситуационных задач;
умения: решать ситуационные задачи
владение навыками: анализа изучаемой ситуации.

Критерии оценки письменного опроса

отлично	ответ на вопросы задачи дан правильно. Объ-яснение хода её решения подробное, последовательное, грамотное, с теоретическими обоснованиями (в том числе из лекционного кур-са); ответы на дополнительные вопросы верные, чёткие, протокол заполнен. –
хорошо	– ответ на вопросы задачи дан правильно. Объ-яснение хода её решения подробное, но недостаточно логичное, с единичными ошибками в деталях, некоторыми затруднениями в теоретическом обосновании (в том числе из лекционного материа-ла); ответы на дополнительные вопросы верные, но недостаточно чёткие.
удовлетворительно	– ответы на вопросы задачи даны правильно. Объяснение хода ее решения недостаточно полное, не-последовательное, с ошибками, слабым теоретическим обосновани-ем (в том числе лекционным материалом); ответы на дополнитель-ные вопросы недостаточно четкие, с ошибками в деталях, протокол заполнен частично или с ошибками.
неудовлетворительно	– ответы на вопросы задачи даны неправильно. Объяснение хода её решения дано неполное, непо-следовательное, с грубыми ошибками, без теоретического обосно-вания; ответы на дополнительные вопросы неправильные (отсут-ствуют), протокол не заполнен или содержит ошибки, неточности.

4.2.6. Критерии оценки выполнения тестовых заданий

При выполнении тестовых заданий обучающийся демонстрирует:

знания: основных математических понятий и методов изучаемой темы или раздела.

Критерии оценки выполнения тестовых заданий

отлично	обучающийся демонстрирует: – правильность ответов не менее чем 85 % тестовых заданий;
хорошо	обучающийся демонстрирует: - правильность ответов не менее чем 70 % тестовых заданий;
удовлетворительно	обучающийся демонстрирует: – правильность ответов не менее 51 % тестовых заданий;
неудовлетворительно	обучающийся: - правильность ответов менее чем на 50 % тестовых заданий.

Разработчик(и): доцент, Кириллова Т.В. ______
(подпись)