МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждениевысшего образования
«Саратовский государственный аграрный университет
имени Н.И. Вавилова»**

И.Ю. Каневская

ПРОИЗВОДНЫЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Исследование функции с помощью производной.

Расчетно-графическая работа «Исследование функций»

Методические указания и контрольные задания для самостоятельной работы иностранных слушателей по дисциплине «Математика»

Саратов 2018

Математика: Методические указания и контрольные работы (с программой) для иностранных слушателей сельскохозяйственных вузов очной формы обучения (2-е издание) / Сост.: И.Ю. Каневская; ФГБОУ ВО«Саратовский ГАУ». Саратов, 2018. –31 с.

Одобрено и рекомендовано к изданию кафедрой «Математика и математическое моделирование» СГАУ им. Н.И.Вавилова.

Введение

Математика является фундаментальной дисциплиной, предусматривает развитие логического мышления, освоения основных методов исследования процессов и решение математических задач.

Настоящее пособие предназначено для иностранных слушателей.

Содержание контрольных работ и их последовательность соответствуют рабочей программе курса «Математика».

ПРОИЗВОДНЫЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

1.Определение производной функции одной переменной

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке ***x*** и некоторой её окрестности. Придадим значению аргумента ***x*** приращение Δy (положительное или отрицательное) и найдем соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Передел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δyпри $\Delta x \to 0$ называется***производной*** функции $y = f(x)$ в точке x.

Обозначения производной – $y', y'_x, f'(x), \frac{dy}{dx}$. Таким образом,

$$y'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{y(x_1) - y(x)}{x_1 - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Операция нахождения производной называется ***дифференцированием***.

Уравнения касательной и нормали Геометрический смысл производной $y'(x_0)$ - угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$. Не любая функция имеет касательную в каждой точке (невозможно построить касательную к графику функции $|x|$ в точке (0,0)). Чтобы в точке $(x_0, f(x_0))$ существовала касательная, необходимо существование предела $k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, т.е. существование производной. Функции, имеющие производную в каждой точке своей области определения (т.е. функции, графики которых имеют касательную в каждой точке), будем называть ***гладкими***. Применяя формулы аналитической геометрии для прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом, получаем при условии, что $y'(x_0) \neq 0$:

уравнение касательной в точке $(x_0, f(x_0))$: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$

уравнение нормали к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$: $y = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) + y(x_0)$

Теорема. Обратная функция $x = g(y)$ в точке $y_0 = f(x_0)$ имеет производную, равную $\frac{1}{f'(x_0)}$. Итак, $x'_y = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Теорема. Пусть функция $u = \varphi(x)$ имеет в точке x производную $u'_x = \varphi'(x)$, функция $y = f(u)$ имеет в точке u производную $y'_u = f'(u)$. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет в точке x производную, равную $y'_x = y'_u u'_x$.

2. Основные правила дифференцирования. Правило Лопиталя

1. Пусть функция $u(x)$ имеет производную в точке x. Тогда в этой точке имеет производную функция $y(x) = cu(x)$ и $(cu(x))' = cu'(x), c \in R$.
2**. Производная суммы и разности**. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x. Тогда в этой точке имеют производные функции $y(x) = u(x) \pm v(x)$, и

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$$

3. **Производная произведения**. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x. Тогда в этой точке имеет производную функция $y(x) = u(x)v(x)$, и

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

4. **Производная частного**.Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x, причём $v(x) \neq 0$. Тогда в этой точке имеет производную функция $y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, и

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'^{(x)}v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

Теорема *(правило Лопиталя)*. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в вблизи точки a, непрерывны в точке a, $g'(x)$ отлична от нуля вблизи a и $f(a) = g(a) = 0$, то предел отношения функций при $x \to a$ равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

К разряду неопределенностей принято относить следующие соотношения:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty \cdot 0, \infty^0, 1^\infty, \infty - \infty$$

3. Определение дифференцируемости и дифференциала

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и некоторой окрестности этой точки и непрерывна в точке x. Тогда приращению Δx аргумента соответствует приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, бесконечно малое при $\Delta x \to 0$.
Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***дифференцируемой*** в точке x, если её приращение Δy в этой точке можно представить в виде $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)$, где A - не зависящая от Δx величина, $\frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Определение. Главная часть приращения Δy дифференцируемой функции, линейная относительно приращения Δx аргумента (т.е. $A \cdot \Delta x$), называется ***дифференциалом***функции и обозначается dy(или $df(x)$).
Теорема *(Связь между дифференцированием и дифференцируемостью)*. Для того, чтобы функция $y = f(x)$ имела в точке x конечную производную $y' = f'(x)$), необходимо и достаточно, чтобы она была дифференцируемой в этой точке.
Выражение для дифференциала имеет вид $dy = f'(x)dx.$

Рассмотрим важное свойство дифференциала, следующее из формулы для производной сложной функции: если функции $x = \varphi(t)$ и $y = f(x)$ имеют в соответствующих точках производные $x'_t = \varphi'(t)$ и $y'_x = f'(x)$, то производная сложной функции $y = f(\varphi(x))$ равна $y'_t = y'_x \cdot x'_t$.
Если x - независимая переменная, то$dy = f'(x)dx.$ Если $y = y(x(t))$, то

$$dy = y'(t)dt = y'_x(x) \cdot x'_t(t)dt = y'_x(x)dx.$$

Таким образом, независимо от того, является ли x независимой переменной, или сама эта переменная x является функцией другой переменной t, формула для нахождения дифференциала первого порядка одна и та же. Это свойство и называется ***инвариантностью формы первого дифференциала***.

4. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $y'(x)$ в каждой точке (a,b). Функция $y'(x)$тоже может иметь производную в некоторых точках этого интервала. Производная функции $\boldsymbol{y'(x)}$ называется второй производной (или производной второго порядка) и обозначается y'', y''_{xx}, $f''_{x^2}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}$.
Производные высших порядков вычисляются последовательно.
Для высших производных произведения функций справедлива ***формула Лейбница:***

$$\boxed{(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}}$$

.
Эта формула может быть доказана методом математической индукции. Для низших производных имеем:

$$(uv)' = u'v + uv'; (uv)'' = ((uv)')' = u''v + 2u'v' + uv'';$$

$$(uv)''' = ((uv)'')' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Дифференциалы высших порядков определяются индуктивно.

Определение. ***Дифференциалом второго порядка*** (или вторым дифференциалом) функции $y = f(x)$ называется дифференциал от её первого дифференциала; ***дифференциалом третьего порядка*** называется дифференциал от второго дифференциала; и вообще, ***дифференциалом*** n***-го порядка*** функции $y = f(x)$ называется дифференциал от её $(n$ -1)-го дифференциала.
При вычислении высших дифференциалов необходимо учитывать, что
$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = d(y')dx = (y')'dxdx = y''(dx)^2,$

$d^3y = d(d^2y) = d(y''(dx)^2) = y'''(dx)^3,$

$d^ny = y^{(n)}(dx)^n.$

5. Теоремы о среднем

Теорема Ролля. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны $f(a) = f(b)$, то на интервале (a, b) существует точка ε, $a < \varepsilon < b$, в которой производная функция $f(x)$ равна нулю: $f'(\varepsilon) = 0$.
Теорема Лагранжа. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, такая, что
$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\varepsilon).$
Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b), то существует по крайней мере одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, такая, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$.
Т.е. отношение приращений функций $f(x)$ и $g(x)$ на данном отрезке $[a, b]$ равно отношению производных этих функций, вычисленных в точке ε.

6. Условия монотонности функции. Необходимое и достаточное условия экстремума

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке интервала (a, b). Для того, чтобы эта функция была постоянной на (a, b), необходимо и достаточно выполнение условия $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$.
Теорема. *Условие (нестрогой) монотонности функции на интервале.*Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке интервала (a, b). Для того, чтобы эта функция была монотонно возрастающей на интервале (a, b), необходимо и достаточно выполнение условия $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$. Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была монотонно убывающей на интервале (a, b), необходимо и достаточно выполнение условия $f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b)$.

Теорема. *Условие строгого возрастания функции на интервале.* Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке (a, b). Для того, чтобы эта функция строго возрастала на (a, b). необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$; $f'(x) \neq 0$ ни на каком подынтервале (a, b).

Теорема. *Необходимое условие экстремума.* Если во внутренней точке ***x*** области определения дифференцируемая функция $f(x)$ имеет экстремум, то $f'(x) = 0$.

Определение. Точка x_0 области определения функции $y = f(x)$ называется ***критической точкой первого рода*** этой функции, если:

1. в окрестности этой точки функция непрерывна;
2. в проколотой окрестности - дифференцируема;
3. в самой точке x_0 (конечная) производная функции равна нулю или не существует.

Определение. Критическая точка первого рода функции $y = f(x)$, в которой производная равна нулю, называется ***стационарной точкой этой функции***.

Первый достаточный признак экстремума (в критической точке, по знаку первой производной). Пусть точка x_0 - критическая точка первого рода функции $y = f(x)$, т.е. функция имеет производную в каждой точке некоторой проколотой окрестности точки x_0, и пусть $f'(x)$ сохраняет знак как справа, так и слева от точки x_0. Тогда: если производная сохраняет знак при переходе через точку x_0, то экстремум в этой точке отсутствует; если производная меняет знак при переходе через x_0, то x_0 - точка экстремума, при этом если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$, $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то x_0 - точка максимума, если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$, $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то x_0 - точка минимума.

7. Выпуклость графика функции. Асимптоты

Определение. *График* функции $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) ***выпуклость, направленную вниз***, если он расположен не ниже любой касательной, проведённой на этом интервале.

Определение. График $y = f(x)$ имеет на (a, b) ***выпуклость, направленную вверх,*** если он расположен не выше любой касательной, проведённой на этом интервале.

Теорема. *Достаточное условие выпуклости графика функции.* Если функция $y = f(x)$ имеет на (a, b) вторую производную и $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) для $\forall x \in (a, b)$, то её график имеет на этом интервале выпуклость, направленную вниз (вверх).

Определение. Точка $M_0(x_0, f(x_0))$ называется ***точкой перегиба*** графика функции $y = f(x)$, если в этой точке график имеет касательную, и существует такая окрестность точки M_0, в которой график функции имеет разные направления выпуклости.

Теорема. *Необходимое условие точки перегиба.* Пусть $M_0(x_0,f(x_0))$ - точка перегиба графика функции $y=f(x)$ и пусть в точке x_0 существует непрерывная в этой точке вторая производная $f''(x_0)$. Тогда$f''(x_0)$=0.

Таким образом, если $M_0(x_0,f(x_0))$ - точка перегиба графика функции $y=f(x)$, и существует $f''(x_0)$, то $f''(x_0)$=0. Однако точкой перегиба может быть также точка $(x,f(x))$, в которой $f''(x)$ не существует.

Теорема.*Достаточное условие точки перегиба.*Пусть x_0- критическая точка второго рода функции $y=f(x)$, и пусть функция имеет вторую производную в некоторой проколотой окрестности этой точки. Тогда если в этой окрестности $f''(x)$ имеет разные знаки по разные стороны от точки x_0, то график функции имеет перегиб в точке $M_0(x_0,f(x_0))$.

Определение. Прямая $x=x_0$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y=f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0+0)$ или $f(x_0-0)$ равен +∞ или $-\infty$.

Определение. Прямая $y=kx+b$ называется ***наклонной асимптотой*** графика функции $y=f(x)$, если функцию можно представить в виде $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$при$x\to\infty$ (или $x\to-\infty$, или $x\to+\infty$).

Теорема. Для того, чтобы прямая $y=kx+b$ была наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to-\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=b.$

8 Общая схема полного исследования функции и построение графика

Исследовать функцию и построить её график по следующему плану:

1. Найти область определения функции;
2. Определить, является ли функция чётной или нечётной;
3. Исследовать её на непрерывность и найти точки разрыва;
4. Рассмотреть поведение функции при ;
5. Найти точки пересечения графика функции с осями координат;
6. Найти асимптоты графика функции;
7. Провести исследование функции по первой производной (промежутки монотонности и экстремумы)
8. Исследовать поведение функции пор второй производной (промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба)
9. Построить график функции, используя результаты её исследования.

Исследование функции с помощью производной. Требования к оформлению расчетно-графических работ.

Расчетно-графическая работа состоит из двух частей – теоретической, и практической, посвященной решению поставленной задачи.

Отчет по расчетно-графической работе должен содержать:

- титульный лист;
- задание на выполнение работы;
- теоретическую часть, описывающую основные сведения о данном разделе дискретной математики;
- описание метода решения задачи;
- описание алгоритма (с блок-схемой) и программы, разработанной для решения задачи;
- текст программы;
- примеры работы программы (не менее 3);
- заключение.

Выполненные расчётно-графические работы предоставлять на рекомендованных электронных носителях (CD-R, CD-RW) – две копии файла на одном носителе.

Комплект сдаваемой работы должен быть оформлен в пластиковом скоросшивателе и помимо электронного носителя должен содержать:

- титульный лист;
- задание на выполнение работы;
- содержание работы;
- лист замечаний;
- дополнительную информацию по решению кафедры.

Оформление отчётов по практическим работам

Программой самостоятельной работы студентов по дисциплине «Математика» предусмотрена работа по завершению и оформлению практических работ «Исследование функции с помощью производной и построение ее графика»

Деятельность преподавателя:

- предоставляет методическое руководство по выполнению практических работ;
- определяет информационные источники;
- устанавливает сроки сдачи отчётов по практическим работам;
- консультирует при затруднениях;
- оценивает предоставленные отчёты.

Деятельность студентов:

- организует свою деятельность в соответствии с методическим руководством по выполнению практических работ;
- изучает информационные материалы;
- проводит мини-исследование;
- подготавливает и оформляет материалы практических работ в соответствии с требованиями;
- предоставляет отчёты в срок.

Критерии оценки:

- грамотность и последовательность изложения содержания проведённого мини-исследования по практической работе;
- оформление в соответствии с требованиями;
- предоставление в срок.

Критерии оценки внеаудиторной самостоятельной работы студентов

Качество выполнения внеаудиторной самостоятельной работы студентов оценивается посредством текущего контроля самостоятельной работы студентов(СРС). Текущий контроль СРС – это форма планомерного контроля качества и объема приобретаемых студентом компетенций в процессе изучения дисциплины, проводится на практических и семинарских занятиях и во время консультаций преподавателя.

Максимальное количество баллов «отлично» студент получает, если:

- обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему;
- дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов;
- может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры;

- правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя, имеющие целью выяснить степень понимания студентом данного материала.

Оценку «хорошо» студент получает, если:

- неполно, но правильно изложено задание;
- при изложении были допущены 1-2 несущественные ошибки, которые он исправляет после замечания преподавателя;
- дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов;
- может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры;
- правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя, имеющие целью выяснить степень понимания студентом данного материала.

Оценку «удовлетворительно» студент получает, если:

- неполно, но правильно изложено задание;
- при изложении была допущена 1 существенная ошибка;
- знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировке понятий;
- излагает выполнение задания недостаточно логично и последовательно;
- затрудняется при ответах на вопросы преподавателя.

Оценка «неудовлетворительно» студент получает, если:

- неполно изложено задание;
- при изложении были допущены существенные ошибки, т.е. если оно не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Заключение

Самостоятельная работа всегда завершается какими-либо результатами. Это выполненные задания, упражнения, решенные задачи, написанные сочинения, заполненные таблицы, построенные графики, подготовленные ответы на вопросы.

Таким образом, широкое использование методов самостоятельной работы, побуждающих к мыслительной и практической деятельности, развивает столь важные интеллектуальные качества человека, обеспечивающие в дальнейшем его стремление к постоянному овладению.Самостоятельная работа всегда завершается какими-либо результатами. Это выполненные задания, упражнения, решенные задачи, написанные сочинения, заполненные таблицы, построенные графики, подготовленные ответы на вопросы.

Описание схемы полного исследования функции и построение графика

1. Определяют область существования функции, которая может состоять из одного или нескольких промежутков, определяемых по возможности выполнения действий, указанных в записи функций.
2. Определяют чётность, нечетность и периодичность функции. Если выполняется условие *f (-x) = f (x)*, то функция чётная и ее график симметричен относительно оси *OY*.
3. Если выполняется условие *f (-x) = -f (x),* то функция нечётная и ее график симметричен относительно начала координат.
4. Если выполняется условие *f (x+Kl) = f (x)*, где *K*= ±1, ±2, ±3… и *l*– минимальный период, то функция периодическая.
5. Для такой функции достаточно построить график на одном из сегментов $[x_{\downarrow}\blacksquare(0); x_{\downarrow}0 + l]$, а на других сегментах график функции повторяется.
6. Находят точки пересечения графика данной функции с осями координат, решая системы уравнений для заданной функции*у =*$f(x)$и для соответствующей оси координат.
7. Определяют поведение функции на границах области ее существования. При этом решается вопрос о горизонтальных асимптотах, уравнения которых имеют вид

у= , где

Если b^x принимает два значения, то функция имеет две горизонтальные асимптоты: левую и правую. Если b^x не равно конкретному числу, то по знаку $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ определяют поведение функции при *x*$\to -\infty$ и *x*$\to +\infty$.

Определяют наклонные асимптоты, уравнения которых имеют вид

y = Kx + b,где *K =*$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ и b =$\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - Kx]$.

Функция может иметь две наклонные асимптоты: левую и правую.

Это зависит от числа значений величин *K*и *b*.

Находят точки разрыва функции и исследуют поведение функции вблизи точек разрыва, вычисляя левый и правый односторонние пределы:

B = *f(x)*иA = *f(x).*

Если хотя бы один из односторонних пределов не существует, то точка x_0 есть точка разрыва второго рода, а *x =*x_0есть уравнение вертикальной асимптоты.

Левый и правый односторонние пределы можно вычислять только в том случае, если слева и справа от точки разрыва x_0 функция существует.

8. Определяют точки экстремума функции и вычисляют значения функции в этих точках, действуя по следующему плану:

а) вычисляют производную функции первого порядка;

б) определяют стационарные точки, в которых первая производная обращается в ноль или не существует;

в) исследуют стационарные точки на экстремум, определяя знак производной слева и справа от стационарной точки;

г) вычисляют значения функции в точках экстремума;

д) записывают опорные точки, соответствующие точкам экстремума.

Определяют интервалы возрастания и убывания функции.

9. Определяют точки перегиба графика функции, для чего:

а) вычисляют производную второго порядка для данной функции;

б) определяют критические точки, в которых вторая производная обращается в ноль или не существует;

в) исследуют критические точки, определяя знак второй производной слева и справ, от критической точки;

г) вычисляют значения функции в этих точках;

д) записывают точки перегиба.

10. Определяют интервалы выпуклости и вогнутости кривой заданной функции.

11. Значения аргумента и соответствующие значения функции записывают в таблицу.

12. Построение графика функции. В системе координат проводят асимптоты данной функции; наносят точки пересечения кривой с осями координат, опорные точки и точки перегиба графика функции; определяют направление кривой, учитывая интервалы возрастания, убывания, выпуклости и вогнутости кривой. Затем наносят точки, соответствующие значениям xи y таблицы, и проводят плавную кривую по отмеченным точкам, приближая ее к асимптотам. Через точки перегиба проводят короткие касательные к кривой.

Пример 1.Провести полное исследование и построить график функции $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$

1.*Область определения*

$x^3 - 1 \neq 0;\quad x \neq 1$, поэтому $x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$

2.*Пересечение с осями координат*: точка $(0;0)$.

3. Ввиду того, что область определения несимметрична относительно начала координат, проверка на четность невозможна.

4. *Интервалы знакопостоянства*

Так как $x^4 \ge 0\ \forall x \in R$, то знак дроби $\frac{x^4}{x^3-1}$ будет зависеть только от знака знаменателя, т.е. от знака $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. Поэтому при $x \in (-\infty;0) \cup (0;1)$ $y<0$, а при $x \in (1;+\infty)$ $y>0$.

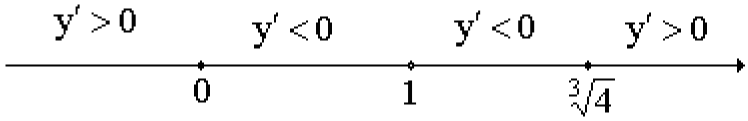
5. *Интервалы монотонности*

$$y' = \frac{4x^3(x^3-1) - x^4 \cdot 3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{4x^6-4x^3-3x^6}{(x^3-1)^2} = \frac{x^6-4x^3}{(x^3-1)^2};$$

$x^6-4x^3=0;$

$x^3(x^3-4)=0;$

$x_1=0;\quad x_2=\sqrt[3]{4}$



При $x \in (-\infty;0) \cup (\sqrt[3]{4};+\infty)$ функция возрастает,

При $x \in (0;1) \cup (1;\sqrt[3]{4})$ функция убывает.

$(0;0)$ - точка максимума, $\left(\sqrt[3]{4};\ \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}\right)$ - точка минимума.

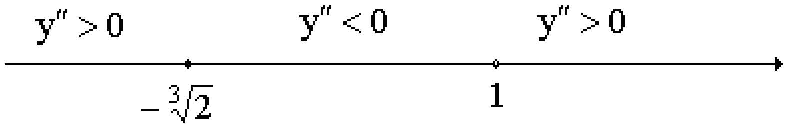
6. *Интервалы выпуклости и вогнутости*:

$$y'' = \frac{(6x^5-12x^2)(x^3-1)^2 - 6x^2(x^6-4x^3)(x^3-1)}{(x^3-1)^4} =$$

$$= 6x^2 \cdot \frac{(x^3-2)(x^3-1) - (x^6-4x^3)}{(x^3-1)^3} = 6x^2 \cdot \frac{x^6-x^3-2x^3+2-x^6+4x^3}{(x^3-1)^3} =$$

$$= 6x^2 \cdot \frac{x^3+2}{(x^3-1)^3};$$

$x^3+2=0;\ \ x=-\sqrt[3]{2}$



$x \in (-\infty;-\sqrt[3]{2}) \cup (1;+\infty)$ график функции вогнутый,

$x \in (-\sqrt[3]{2};\ 1)$ график функции выпуклый.

$\left(-\sqrt[3]{2};\ -\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}\right)$ - точка перегиба.

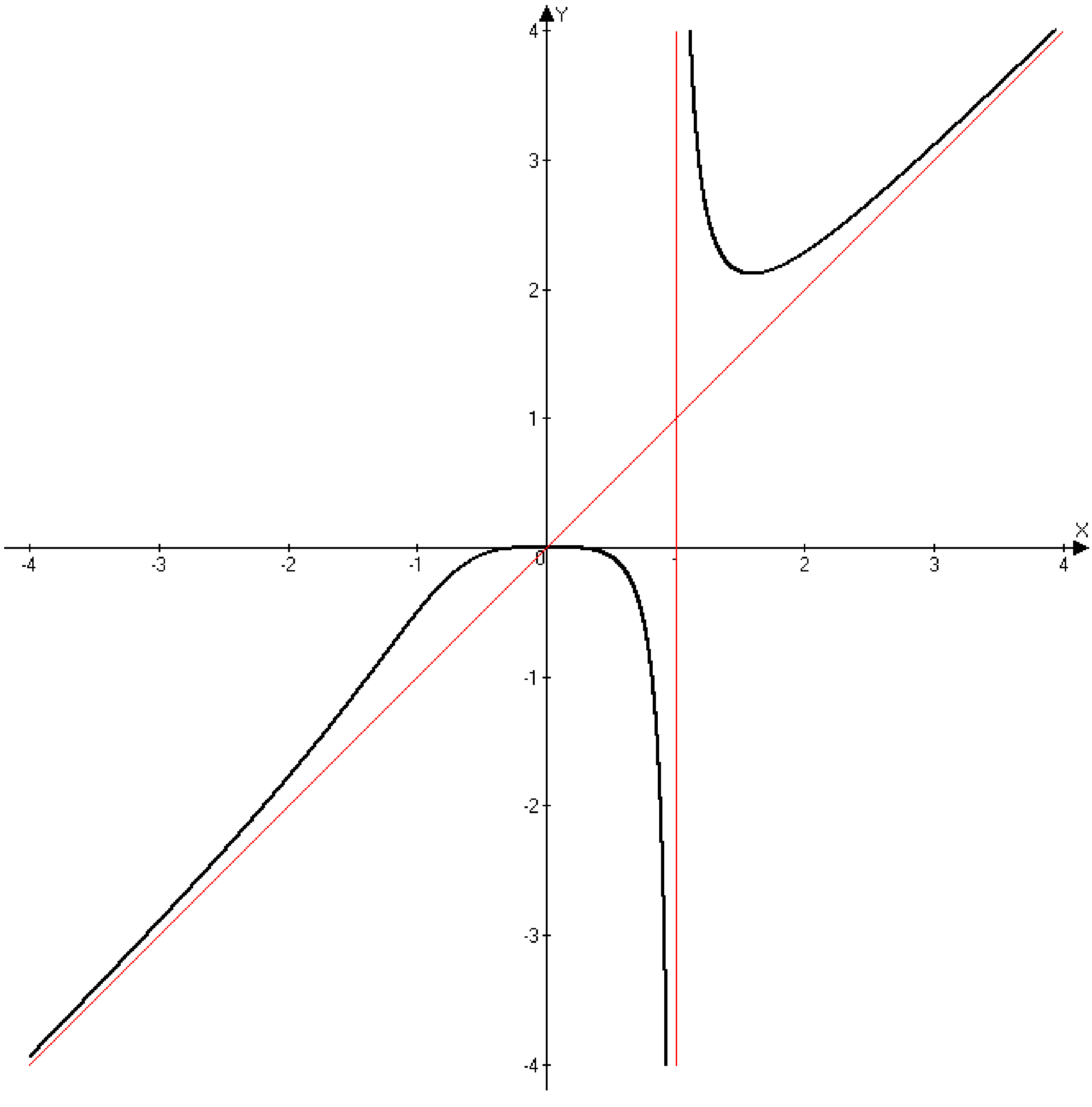
7. *Асимптоты*

Так как $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4}{x^3-1}=\infty$, то $x=1$ - вертикальная асимптота.

Уравнение наклонной асимптоты будет искать в виде $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{x\left(x^3-1\right)}=1;\ \ b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4}{x^3-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^3-1}=0.$$

Следовательно, $y=x$ - наклонная асимптота.



Пример 2. Провести полное исследование и построить график функции $y=\dfrac{5x^2}{x^2-9}$.

1) Область определения функции $D(y)=\mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}$.

2) Область определения функции симметрична относительно начала координат и

$$f(-x)=\frac{5(-x)^2}{(-x)^2-9}=\frac{5x^2}{x^2-9}=f(x).$$

Следовательно, функция четная, и ее график симметричен относительно оси Oy.

3) Функция имеет две точки разрыва: $x=3$ и $x=-3$. Определим тип разрывов:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0}\frac{5x^2}{x^2-9}=\lim_{x\to 3-0}\frac{5x^2}{(x-3)\cdot(x+3)}=$$

$$=\left(\frac{5\cdot 3^2}{(3-0-3)\cdot(3-0+3)}\right)=\left(\frac{45}{(-0)\cdot 6}\right)=\left(\frac{45}{-0}\right)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3+0}\frac{5x^2}{x^2-9}=\lim_{x\to 3+0}\frac{5x^2}{(x-3)\cdot(x+3)}=$$

$$=\left(\frac{5\cdot 3^2}{(3+0-3)\cdot(3+0+3)}\right)=\left(\frac{45}{(+0)\cdot 6}\right)=\left(\frac{45}{+0}\right)=+\infty.$$

Итак, точка $x=3$ является точкой разрыва II рода, прямая $x=3$ – вертикальная асимптота графика функции.

Учитывая симметрию графика функции относительно оси Oy, для точки $x=-3$ получаем:

$$\lim_{x\to -3-0} f(x)=\lim_{x\to -3-0}\frac{5x^2}{x^2-9}=+\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to -3+0} f(x)=\lim_{x\to -3+0}\frac{5x^2}{x^2-9}=-\infty.$$

Следовательно, точка $x=-3$ тоже является точкой разрыва II рода, прямая $x=-3$ – вертикальная асимптота графика функции.

4) Функция определена при сколь угодно больших x. Следовательно, возможно существование наклонных асимптот. При $x\to+\infty$ имеем:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{(x^2-9)x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^2}{x^3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{x}\right)=0,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-k_1\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^2}{x^2-9}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{x^2-9}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^2}{x^2}\right)=5.$$

Следовательно, прямая $y=0\cdot x+5$ (т.е. прямая $y=5$) является наклонной асимптотой правой части графика функции. Та же прямая $y=5$ будет наклонной асимптотой и для левой части графика функции (так как график функции симметричен относительно оси Oy).

5) Найдем точки пересечения графика с осями координат. Пересечение с осью Ox:

$$y = 0 \Rightarrow \frac{5x^2}{x^2 - 9} = 0, \quad \Rightarrow 5x^2 = 0,$$

$$\Rightarrow x = 0$$

Пересечение с осью Oy:

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{5 \cdot 0^2}{0^2 - 9} = 0$$

Следовательно, график функции пересекает обе координатные оси в начале координат $O(0;0)$.

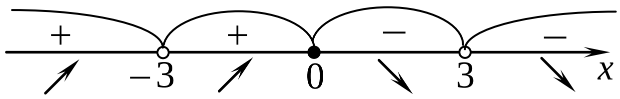
6) Найдем производную функции и критические точки первого рода. Имеем:

$$y' = \left(\frac{5x^2}{x^2 - 9} \right)' = 5 \cdot \frac{2x \cdot (x^2 - 9) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 9)^2} = -\frac{90x}{(x^2 - 9)^2},$$

$$\Rightarrow \quad \text{а) } y' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \qquad \text{б) } y' \nexists \quad \text{при} \quad x = \pm 3 \notin D(y).$$

Таким образом, критической точкой первого рода является только точка $x = 0$.

Критическая точка $x = 0$ и точки разрыва $x = \pm 3$ разбивают область определения функции на четыре части. Определим знак производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, функция возрастает на интервалах $(-\infty; -3)$ и $(-3; 0)$, функция убывает на интервалах $(0; 3)$ и $(3; +\infty)$. Точка $x = 0$ – точка максимума. Максимум функции:

$$y_{\max} = y(0) = 0.$$

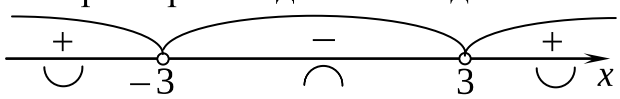
7) Найдем вторую производную функции и критические точки второго рода. Имеем:

$$y'' = \left(-\frac{90x}{(x^2 - 9)^2} \right)' = -90 \cdot \frac{1 \cdot (x^2 - 9)^2 - x \cdot 2 \cdot (x^2 - 9) \cdot 2x}{(x^2 - 9)^4} = \frac{270(x^2 + 3)}{(x^2 - 9)^3},$$

$$\Rightarrow \quad \text{а) } y'' \neq 0 \quad \text{при} \quad \forall x \in D(y); \qquad \text{б) } y'' \nexists \quad \text{при} \quad x = \pm 3 \notin D(y).$$

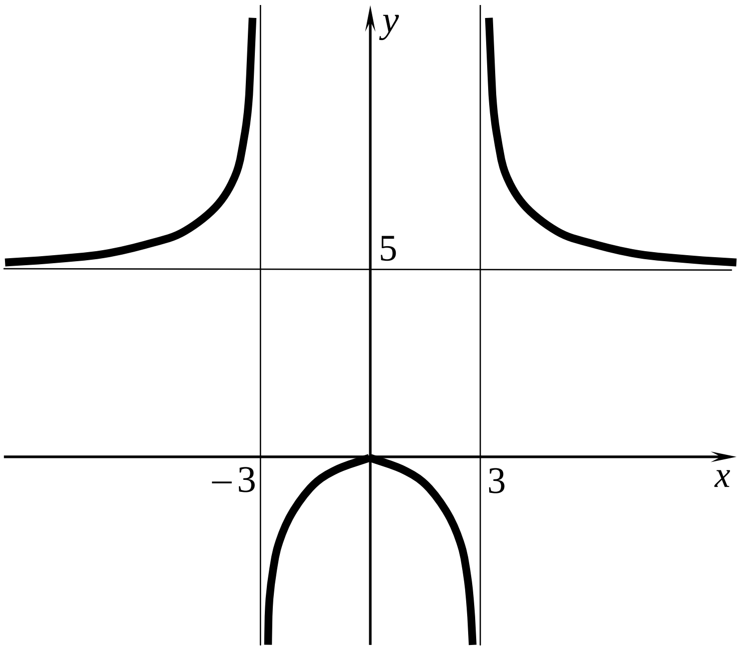
Таким образом, критических точек второго рода функция не имеет. Значит, график функции не имеет точек перегиба.

Точки разрыва $x = \pm 3$ разбивают область определения функции на три части. Определим знак второй производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, график функции выпуклый на интервале $(-3; 3)$, график функции вогнутый на интервалах $(-\infty; -3)$ и $(3; +\infty)$.

8) На основании проведенного исследования строим следующий график:



В задачах 1-32 провести полное исследование функции и построить графики

Вариант 1

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$
2. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$
3. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$

Вариант 2

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
2. $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$
3. $y = x - \ln\ \ x + 2$

Вариант 3

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$
2. $y = \dfrac{x^2 - 3}{x + 2}$

3. $y = x - 2 + \dfrac{4}{x - 2}$

Вариант 4

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$
2. $y = \dfrac{x^2 - 8}{x - 3}$

$y = \dfrac{4x^3}{3\ \ x^2 + 1}$

Вариант 5

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$
2. $y = \dfrac{x^2 + 9}{x + 4}$
3. $y = \dfrac{e^{x-1}}{x}$

Вариант 6

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$
2. $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$
3. $y = \dfrac{8x}{x - 2\ ^{2}}$

Вариант 7

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$
2. $y = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$
3. $y = \dfrac{x^2}{2\ \ x - 1}$

Вариант 8

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7$
2. $y = \dfrac{x^2 + 5}{x + 2}$

$y=\ln\ \ x^2+2x+2$

Вариант 9

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y=2x^3-15x^2+36x-32$
2. $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$
3. $y=2x\ln x$

Вариант 10

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y=2x^3-3x^2-36x+20$
2. $y=\dfrac{x^2-15}{x+4}$
3. $y=\dfrac{x^3}{2\ \ x-1\ {}^2}$

Вариант 11

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y=2x^3+3x^2-36x-21$
2. $y=\dfrac{x^2+9}{x}$
3. $y=\dfrac{x^3}{3\ \ x^2-3}$

Вариант 12

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y=2x^3+15x^2+36x+32$
2. $y=\dfrac{x^2+8}{x+1}$

$y=\dfrac{2\ \ x-1\ {}^2}{x^2}$

Вариант 13

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y=2x^3-15x^2+24x+4$
2. $y=\dfrac{x^2+21}{x-2}$
3. $y=\dfrac{\sqrt{e^x}}{x}$

Вариант 14

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 61$
2. $y = \dfrac{x^2 + 16}{x + 3}$
3. $y = \dfrac{3\ln x}{x}$

Вариант 15

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 56$
2. $y = \dfrac{x^2 - 12}{x - 4}$
3. $y = 4xe^{-\frac{x^2}{2}}$

Вариант 16

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 2x^3 + 15x^2 + 24x - 2$
2. $y = \dfrac{x^2 + 25}{x}$ 3. $y = \dfrac{4x^3}{9(3 - x^2)}$

Вариант 17

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$
2. $y = \dfrac{x^2 + 24}{x + 1}$
3. $y = 4xe^{-x}$

Вариант 18

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 26$
2. $y = \dfrac{x^2 + 32}{x - 2}$
3. $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x^2}$

Вариант 19

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 + 3x^2 - 24x - 21$
2. $y = \dfrac{x^2 + 27}{x + 3}$

3. $y = \ln \ x^2 + 4x + 5$

Вариант 20

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 + 9x^2 + 24x + 17$
2. $y = \dfrac{x^2 - 7}{x - 4}$

$y = \dfrac{2x^2}{2x - 1}$

Вариант 21

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 4x^3 - 3x^2 - 9x - 10$
2. $y = \dfrac{x^2 + 3}{x - 2}$
3. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Вариант 22

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 5x^3 + 3x^2 - 9x + 3$
2. $y = \dfrac{x^2 - 7}{x + 6}$
3. $y = e^{2x - x^2}$

Вариант 23

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 3x^3 + 2x^2 - 8x + 5$
2. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$
3. $y = x + arctgx$

Вариант 24

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 5x^3 + 4x^2 - 8x + 10$
2. $y = \dfrac{x^2 - 6}{x + 3}$

$y = x^{\frac{2}{3}} e^{-x}$

Вариант 25

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 + 3x^2 - 4x - 5$
2. $y = \dfrac{x^2 - 6}{x + 1}$
3. $y = \dfrac{e^x}{1 + x}$

Вариант 26

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$
2. $y = \dfrac{x^2 + 6}{x - 1}$
3. $y = \dfrac{e^x}{1 - 2x}$

Вариант 27

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$
2. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$
3. $y = \dfrac{e^{2x}}{1 + x}$

Вариант 28

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 + 5x^2 - 7x - 5$
2. $y = \dfrac{x^2 - 4}{2x + 1}$

$y = \dfrac{2e^{-x}}{1 + x}$

Вариант 29

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 + x^2 - 3x + 5$
2. $y = \dfrac{3x^2 - 6}{x - 1}$
3. $y = \dfrac{e^x}{x}$

Вариант 30

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 + 4x^2 - 4x - 3$
2. $y = \dfrac{x^2 - 6x}{x+1}$
3. $y = \dfrac{e^{x+1}}{1+x}$

Вариант 31

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 + 4x^2 - 5x + 2$
2. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x+4}$
3. $y = \dfrac{e^{x}}{1+x^2}$

Вариант 32

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 + 3x^2 - 3x - 3$
2. $y = \dfrac{x^2 - 3}{x+2}$

$y = \dfrac{e^{x}}{3+x}$

Задания для самостоятельной работы.

Вычислить производные следующих функций:

1. $y = x^5 - 5x^4 + 3x^2 - 16x + 2$
2. $y = \frac{6}{x} - \frac{13}{x^2} - \frac{7}{x^3} - \frac{4}{5x^4}$
3. $y = 4x^{7/2} - 9x^{5/2} + 2x^{-3/2}$
4. $y = -6\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[5]{x^4} + \sqrt{x} + 3$
5. $y = \frac{3\cos x}{2x+1}$
6. $y = (tgx - 1)\arcsin x$
7. $y = x^2 3^x$
8. $y = (x^2 + 11x - 6)^4$
9. $y = \sin(2x+1)$
10. $y = \cos^3 x$
11. $y = \ln(4 - 7x)$
12. $y = \sin x^2$
13. $y = 8^{ctgx}$
14. $y = \ln(arctgx - x)$
15. $y = e^{-x} \ln ctgx$
16. $y = e^{-3x} \sin 3x$
17. $y = \frac{e^{1-2x}}{\ln tgx}$
18. $y = \sin^8(tgx)$
19. $y = \cos\ln(6x - x^2)$
20. $y = \ln^3(x^2 - 2\ln x)$
21. $x^3 - y^3 = x^2 y^2$
22. $xy = tgy$
23. $y = \frac{(6-x)^2 (2x+4)^5}{(6x-6)^3 (3-2x)^4}$
24. $y = \frac{\sqrt[5]{(6x+6)^3}\,(2-16x)^8}{\sqrt{7-6x}\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$
25. $y = (\cos 2x)^{\sin x}$
26. $y = (\ln x)^{ctg5x}$

Вычислить дифференциалы функций:

27. $y = tg2x \cdot e^{2x}$
28. $y = \ln(x^2 + 5)$
29. $y = \sqrt{arctg3x}$
30. $y = x^2 \arcsin x^2$

Вычислить приближенные значения:

31. $\sqrt[3]{8{,}01}$
32. $\cos 32^\circ$
33. $(0.96)^3$
34. $e^{0{,}2}$
35. $\arcsin 0{,}48$
36. $\ln 1{,}01$

Вычислить следующие пределы, применяя правило Лопиталя.

37. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{tg8x}$

38. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{4-x}{x^3-64}$

39. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{e^x-e^{-x}}$

40. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

41. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln tgx}{tgx}$

42. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$

43. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$

44. $\lim\limits_{x\to +0} x\cdot e^{\frac{1}{x}}$

45. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot ctgx$

46. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(cosx)^{\frac{\pi}{2}-x}$

47. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$

48. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{x}$

Примерные варианты контрольной работы «Производная функции»

Вариант № 1

Найти y':

1) $y=0{,}8\sqrt[4]{x}-\frac{x^3}{0{,}3}+\frac{1}{5x^2}$;

2) $y=\frac{x\sin x}{1+tgx}$;

3) $y=\arccos\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

4) $y=x^{\ln x}$.

5) Найти производную функции y=y(x), заданную неявно уравнением

$xy^2+y+x^2=5$.

6) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Вариант № 2

Найти y':

1) $y=\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x^3}+4\sqrt{5}$;

2) $y=\frac{x\cos x}{1+ctgx}$;

3) $y=arctg^2\frac{1}{x}$;

4) $y=\frac{(x-2)^2\sqrt{x+1}}{(x-5)^3}$.

5) Найти производную функции y=y(x), заданную неявно уравнением

$y=\sin(x+y)$.

6) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-tgx}$.

Вариант № 3

Найти y':

1) $y=2x^5-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{2}{\sqrt[3]{7}}$;

2) $y=\frac{xtgx}{1+e^x}$;

3) $y=\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}$;

4) $y=(\cos x)^x$.

5) Найти производную функции y=y(x), заданную неявно уравнением

$y^3+x^3-3axy=0$.

6) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}$.

Вариант № 4

Найти y':

1) $y=8\sqrt[4]{x}-\frac{x^3}{0{,}6}+\frac{4}{\sqrt[4]{x}}$;

2) $y=\frac{x^2\cos x}{1+x^2}$;.

3) $y=\arcsin\frac{3x-1}{\sqrt{5}}$;

4) $y=x^{ctgx}$.

5) Найти производную функции y=y(x), заданную неявно уравнением

$x+y=e^{x+y}$.

6) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

Вопросы для самоконтроля

1) Задача, приводящая к производной.
2) Определение и геометрический смысл производной.
3) Производная обратной и сложной функции
4) Основные правила дифференцирования.Правило Лопиталя.
6) Дифференцируемость и дифференциал. Инвариантность.
7) Производные параметрических и неявных функций.
8) Формула Лейбница.Дифференциалы высших порядков.
9) Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши. Геометрический смысл.
10) Условия монотонности фунции.Необходимое и достоаточное условия экстремума.
11) Точки перегиба. Направление выпуклости.Схема исследования функции.

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

1. $C' = 0$
2. $(CU)' = CU'$
3. $(U+V)' = U' + V'$
4. $(U\cdot V)' = U'V + UV'$
5. $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V-UV'}{V^2}$
6. $X' = 1$
7. $(U^n)' = nU^{n-1}\cdot U'$
8. $(\ln U)' = \dfrac{U'}{U}$
9. $(a^U)' = a^U \ln a\cdot U'$
10. $(e^U)' = e^U\cdot U'$
11. $(\sin U)' = \cos U\cdot U'$
12. $(\cos U)' = -\sin U\cdot U'$
13. $(tgU)' = \dfrac{U'}{\cos^2 U}$
14. $(ctgU)' = -\dfrac{U'}{\sin^2 U}$
15. $(\arcsin U)' = \dfrac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$
16. $(\arccos U)' = -\dfrac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$
17. $(arctgU)' = \dfrac{U'}{1+U^2}$
18. $(arcctgU)' = -\dfrac{U'}{1+U^2}$
19. $(\sqrt{U})' = \dfrac{U'}{2\sqrt{U}}$
20. $\left(\dfrac{1}{U}\right)' = -\dfrac{U'}{U^2}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература:

1. **Демидович, Б.П.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебн. пособие для вузов / Б.П. Демидович.- М.: ООО Издательство «АСТ», 2003.-365с.

2. **Письменный, Д.Т.** Конспект лекций по высшей математике в 2х частях./ Д.Т. Письменный. - М.: Айрис-пресс, 2008.-544с.
3. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016. Под редакцией Ф.Ф.Лысенко, С.Ю. Кулабухова. Москва, 2015.
4. **Сканави,М. И.** Сборник задач по математике/Москва-2010 г.

Дополнительная литература:

1. **Боков, О.Г.** Высшая математика, Раздел «Исследование функций». Обучающая программа и методические указания, 2004-21 с.
2. Пособие для подготовки к ЕГЭ по математике: Уч. пособие /Сост. Уейская Н.Б.; ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ». Саратов, 2009.
3. Руководство по выполнению заданий ЕГЭ по математике: Уч.-методическое пособие /Сост. Уейская Н.Б.; ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ». Саратов, 2012.

Содержание