

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Соловьев Дмитрий Александрович
Должность: ректор ФГБОУ ВО Саратовский ГАУ
Дата подписания: 26.04.2024 14:45:53
Уникальный программный ключ:
5b8335c1f3d6e7bd9b1e28854c1e91866538



МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Саратовский государственный аграрный университет
имени Н.И. Вавилова»**

И.Ю. Каневская

ПРОИЗВОДНЫЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

**Исследование функции с помощью производной.
Расчетно-графическая работа «Исследование функций»**

**Методические указания и контрольные задания для самостоятельной работы иностранных слушателей
по дисциплине «Математика»**

Саратов 2018

Математика: Методические указания и контрольные работы (с программой) для иностранных слушателей сельскохозяйственных вузов очной формы обучения (2-е издание) / Сост.: И.Ю. Каневская; ФГБОУ ВО«Саратовский ГАУ». Саратов, 2018. –31 с.

Одобрено и рекомендовано к изданию кафедрой «Математика и математическое моделирование» СГАУ им. Н.И.Вавилова.

Введение

Математика является фундаментальной дисциплиной, предусматривает развитие логического мышления, освоения основных методов исследования процессов и решение математических задач.

Настоящее пособие предназначено для иностранных слушателей.

Содержание контрольных работ и их последовательность соответствуют рабочей программе курса «Математика».

1. Определение производной функции одной переменной

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и некоторой её окрестности. Придадим значению аргумента x приращение Δx (положительное или отрицательное) и найдем соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \rightarrow 0$ называется *производной* функции $y = f(x)$ в точке x .

Обозначения производной – $y', y'_x, f'(x), \frac{dy}{dx}$. Таким образом,

$$y'(x) = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{y(x_1) - y(x)}{x_1 - x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Уравнения касательной и нормали Геометрический смысл производной $y'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$. Не любая функция имеет касательную в каждой точке (невозможно построить касательную к графику функции $|x|$ в точке $(0,0)$). Чтобы в точке $(x_0, f(x_0))$ существовала касательная, необходимо существование предела $k(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, т.е. существование производной. Функции, имеющие производную в каждой точке своей области определения (т.е. функции, графики которых имеют касательную в каждой точке), будем называть *гладкими*. Применяя формулы аналитической геометрии для прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом, получаем при условии, что $y'(x_0) \neq 0$:

уравнение касательной в точке $(x_0, f(x_0))$: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$

уравнение нормали к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$:
$$y = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) + y(x_0)$$

Теорема. Обратная функция $x = g(y)$ в точке $y_0 = f(x_0)$ имеет производную, равную $\frac{1}{f'(x_0)}$. И так, $x'_y = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Теорема. Пусть функция $u = \varphi(x)$ имеет в точке x производную $u'_x = \varphi'(x)$, функция $y = f(u)$ имеет в точке u производную $y'_u = f'(u)$. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет в точке x производную, равную $y'_x = y'_u u'_x$.

2. Основные правила дифференцирования. Правило Лопиталья

1. Пусть функция $u(x)$ имеет производную в точке x . Тогда в этой точке имеет производную функция $y(x) = cu(x)$ и $(cu(x))' = cu'(x)$, $c \in R$.

2. **Производная суммы и разности.** Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x . Тогда в этой точке имеют производные функции $y(x) = u(x) \pm v(x)$, и

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$$

3. **Производная произведения.** Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x . Тогда в этой точке имеет производную функция $y(x) = u(x)v(x)$, и

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

4. **Производная частного.** Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x , причём $v(x) \neq 0$. Тогда в этой точке имеет производную функция $y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, и

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

Теорема (правило Лопиталья). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы вблизи точки a , непрерывны в точке a , $g'(x)$ отлична от нуля вблизи a и $f(a) = g(a) = 0$, то предел отношения функций при $x \rightarrow a$ равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

К разряду неопределенностей принято относить следующие соотношения:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty \cdot 0, \infty^0, 1^\infty, \infty - \infty$$

3. Определение дифференцируемости и дифференциала

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и некоторой окрестности этой точки и непрерывна в точке x . Тогда приращению Δx аргумента соответствует приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, бесконечно малое при $\Delta x \rightarrow 0$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x , если её приращение Δy в этой точке можно представить в виде $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)$, где A - не зависящая от Δx величина, $\frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

Определение. Главная часть приращения Δy дифференцируемой функции, линейная относительно приращения Δx аргумента (т.е. $A \cdot \Delta x$), называется **дифференциалом** функции и обозначается dy (или $df(x)$).

Теорема (Связь между дифференцированием и дифференцируемостью). Для того, чтобы функция $y = f(x)$ имела в точке x конечную производную $y' = f'(x)$, необходимо и достаточно, чтобы она была дифференцируемой в этой точке.

Выражение для дифференциала имеет вид $dy = f'(x)dx$.

Рассмотрим важное свойство дифференциала, следующее из формулы для производной сложной функции: если функции $x = \varphi(t)$ и $y = f(x)$ имеют в соответствующих точках производные $x'_t = \varphi'(t)$ и $y'_x = f'(x)$, то производная сложной функции $y = f(\varphi(x))$ равна $y'_t = y'_x \cdot x'_t$.

Если x - независимая переменная, то $dy = f'(x)dx$. Если $y = y(x(t))$, то

$$dy = y'(t)dt = y'_x(x) \cdot x'_t(t)dt = y'_x(x)dx.$$

Таким образом, независимо от того, является ли x независимой переменной, или сама эта переменная x является функцией другой переменной t , формула для нахождения дифференциала первого порядка одна и та же. Это свойство и называется **инвариантностью формы первого дифференциала**.

4. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $y'(x)$ в каждой точке (a,b) . Функция $y'(x)$ тоже может иметь производную в некоторых точках этого интервала. Производная функции $y'(x)$ называется второй производной (или производной второго порядка) и обозначается y'' , y''_{xx} , f''_{x^2} , $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

Производные высших порядков вычисляются последовательно.

Для высших производных произведения функций справедлива **формула Лейбница**:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

Эта формула может быть доказана методом математической индукции. Для низших производных имеем:

$$(uv)' = u'v + uv'; (uv)'' = ((uv)')' = u''v + 2u'v' + uv'';$$

$$(uv)''' = ((uv)'')' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''''.$$

Дифференциалы высших порядков определяются индуктивно.

Определение. *Дифференциалом второго порядка* (или вторым дифференциалом) функции $y = f(x)$ называется дифференциал от её первого дифференциала; *дифференциалом третьего порядка* называется дифференциал от второго дифференциала; и вообще, *дифференциалом n -го порядка* функции $y = f(x)$ называется дифференциал от её $(n - 1)$ -го дифференциала.

При вычислении высших дифференциалов необходимо учитывать, что $d^2y = d(dy) = d(y' dx) = d(y') dx = (y')' dx dx = y''(dx)^2$,

$$d^3y = d(d^2y) = d(y''(dx)^2) = y'''(dx)^3,$$

$$d^n y = y^{(n)}(dx)^n.$$

5. Теоремы о среднем

Теорема Ролля. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка равны $f(a) = f(b)$, то на интервале (a, b) существует точка ε , $a < \varepsilon < b$, в которой производная функция $f(x)$ равна нулю: $f'(\varepsilon) = 0$.

Теорема Лагранжа. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , то на этом интервале найдется по крайней мере одна точка ε , $a < \varepsilon < b$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\varepsilon).$$

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b) , то

существует по крайней мере одна точка ε , $a < \varepsilon < b$, такая, что $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$.

Т.е. отношение приращений функций $f(x)$ и $g(x)$ на данном отрезке $[a, b]$ равно отношению производных этих функций, вычисленных в точке ε .

6. Условия монотонности функции. Необходимое и достаточное условия экстремума

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке интервала (a, b) . Для того, чтобы эта функция была постоянной на (a, b) , необходимо и достаточно выполнение условия $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$.

Теорема. *Условие (нестрогой) монотонности функции на интервале.* Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке интервала (a, b) . Для того, чтобы эта функция была монотонно возрастающей на интервале (a, b) , необходимо и достаточно выполнение условия $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$. Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была монотонно убывающей на интервале (a, b) , необходимо и достаточно выполнение условия $f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b)$.

Теорема. Условие строгого возрастания функции на интервале. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке (a, b) . Для того, чтобы эта функция строго возрастала на (a, b) , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b); f'(x) \neq 0$ ни на каком подынтервале (a, b) .

Теорема. Необходимое условие экстремума. Если во внутренней точке x области определения дифференцируемая функция $f(x)$ имеет экстремум, то $f'(x) = 0$.

Определение. Точка x_0 области определения функции $y = f(x)$ называется **критической точкой первого рода** этой функции, если:

1. в окрестности этой точки функция непрерывна;
2. в проколоте окрестности - дифференцируема;
3. в самой точке x_0 (конечная) производная функции равна нулю или не существует.

Определение. Критическая точка первого рода функции $y = f(x)$, в которой производная равна нулю, называется **стационарной точкой этой функции**.

Первый достаточный признак экстремума (в критической точке, по знаку первой производной). Пусть точка x_0 - критическая точка первого рода функции $y = f(x)$, т.е. функция имеет производную в каждой точке некоторой проколоте окрестности точки x_0 , и пусть $f'(x)$ сохраняет знак как справа, так и слева от точки x_0 . Тогда: если производная сохраняет знак при переходе через точку x_0 , то экстремум в этой точке отсутствует; если производная меняет знак при переходе через x_0 , то x_0 - точка экстремума, при этом если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$, $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то x_0 - точка максимума, если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$, $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то x_0 - точка минимума.

7. Выпуклость графика функции. Асимптоты

Определение. График функции $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) **выпуклость, направленную вниз**, если он расположен не ниже любой касательной, проведённой на этом интервале.

Определение. График $y = f(x)$ имеет на (a, b) **выпуклость, направленную вверх**, если он расположен не выше любой касательной, проведённой на этом интервале.

Теорема. Достаточное условие выпуклости графика функции. Если функция $y = f(x)$ имеет на (a, b) вторую производную и $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) для $\forall x \in (a, b)$, то её график имеет на этом интервале выпуклость, направленную вниз (вверх).

Определение. Точка $M_0(x_0, f(x_0))$ называется **точкой перегиба** графика функции $y = f(x)$, если в этой точке график имеет касательную, и существует такая окрестность точки M_0 , в которой график функции имеет разные направления выпуклости.

Теорема. Необходимое условие точки перегиба. Пусть $M_0(x_0, f(x_0))$ - точка перегиба графика функции $y = f(x)$ и пусть в точке x_0 существует непрерывная в этой точке вторая производная $f''(x_0)$. Тогда $f''(x_0) = 0$.

Таким образом, если $M_0(x_0, f(x_0))$ - точка перегиба графика функции $y = f(x)$, и существует $f''(x_0)$, то $f''(x_0) = 0$. Однако точкой перегиба может быть также точка $(x, f(x))$, в которой $f''(x)$ не существует.

Теорема. Достаточное условие точки перегиба. Пусть x_0 - критическая точка второго рода функции $y = f(x)$, и пусть функция имеет вторую производную в некоторой проколотой окрестности этой точки. Тогда если в этой окрестности $f''(x)$ имеет разные знаки по разные стороны от точки x_0 , то график функции имеет перегиб в точке $M_0(x_0, f(x_0))$.

Определение. Прямая $x = x_0$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0 + 0)$ или $f(x_0 - 0)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если функцию можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ (или $x \rightarrow -\infty$, или $x \rightarrow +\infty$).

Теорема. Для того, чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = b$.

8 Общая схема полного исследования функции и построение графика

Исследовать функцию и построить её график по следующему плану:

1. Найти область определения функции;
2. Определить, является ли функция чётной или нечётной;
3. Исследовать её на непрерывность и найти точки разрыва;
4. Рассмотреть поведение функции при ;
5. Найти точки пересечения графика функции с осями координат;
6. Найти асимптоты графика функции;
7. Провести исследование функции по первой производной (промежутки монотонности и экстремумы)
8. Исследовать поведение функции по второй производной (промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба)
9. Построить график функции, используя результаты её исследования.

Исследование функции с помощью производной. Требования к оформлению расчетно-графических работ.

Расчетно-графическая работа состоит из двух частей – теоретической, и практической, посвященной решению поставленной задачи.

Отчет по расчетно-графической работе должен содержать:

- титульный лист;
- задание на выполнение работы;
- теоретическую часть, описывающую основные сведения о данном разделе дискретной математики;
- описание метода решения задачи;
- описание алгоритма (с блок-схемой) и программы, разработанной для решения задачи;
- текст программы;
- примеры работы программы (не менее 3);
- заключение.

Выполненные расчётно-графические работы предоставлять на рекомендованных электронных носителях (CD-R, CD-RW) – две копии файла на одном носителе.

Комплект сдаваемой работы должен быть оформлен в пластиковом скоросшивателе и помимо электронного носителя должен содержать:

- титульный лист;
- задание на выполнение работы;
- содержание работы;
- лист замечаний;
- дополнительную информацию по решению кафедры.

Оформление отчётов по практическим работам

Программой самостоятельной работы студентов по дисциплине «Математика» предусмотрена работа по завершению и оформлению практических работ «Исследование функции с помощью производной и построение ее графика»

Деятельность преподавателя:

- предоставляет методическое руководство по выполнению практических работ;
- определяет информационные источники;
- устанавливает сроки сдачи отчётов по практическим работам;
- консультирует при затруднениях;
- оценивает предоставленные отчёты.

Деятельность студентов:

- организует свою деятельность в соответствии с методическим руководством по выполнению практических работ;
- изучает информационные материалы;
- проводит мини-исследование;
- подготавливает и оформляет материалы практических работ в соответствии с требованиями;
- предоставляет отчёты в срок.

Критерии оценки:

- грамотность и последовательность изложения содержания проведённого мини-исследования по практической работе;
- оформление в соответствии с требованиями;
- предоставление в срок.

Критерии оценки внеаудиторной самостоятельной работы студентов

Качество выполнения внеаудиторной самостоятельной работы студентов оценивается посредством текущего контроля самостоятельной работы студентов (СРС). Текущий контроль СРС – это форма планомерного контроля качества и объема приобретаемых студентом компетенций в процессе изучения дисциплины, проводится на практических и семинарских занятиях и во время консультаций преподавателя.

Максимальное количество баллов «отлично» студент получает, если:

- обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему;
- дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов;
- может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры;

- правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя, имеющие целью выяснить степень понимания студентом данного материала.

Оценку «хорошо» студент получает, если:

- неполно, но правильно изложено задание;
- при изложении были допущены 1-2 несущественные ошибки, которые он исправляет после замечания преподавателя;
- дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов;
- может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры;
- правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя, имеющие целью выяснить степень понимания студентом данного материала.

Оценку «удовлетворительно» студент получает, если:

- неполно, но правильно изложено задание;
- при изложении была допущена 1 существенная ошибка;
- знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировке понятий;
- излагает выполнение задания недостаточно логично и последовательно;
- затрудняется при ответах на вопросы преподавателя.

Оценка «неудовлетворительно» студент получает, если:

- неполно изложено задание;
- при изложении были допущены существенные ошибки, т.е. если оно не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Заключение

Самостоятельная работа всегда завершается какими-либо результатами. Это выполненные задания, упражнения, решенные задачи, написанные сочинения, заполненные таблицы, построенные графики, подготовленные ответы на вопросы.

Таким образом, широкое использование методов самостоятельной работы, побуждающих к мыслительной и практической деятельности, развивает столь важные интеллектуальные качества человека, обеспечивающие в дальнейшем его стремление к постоянному овладению. Самостоятельная работа всегда завершается какими-либо результатами. Это выполненные задания, упражнения, решенные задачи, написанные сочинения, заполненные таблицы, построенные графики, подготовленные ответы на вопросы.

Описание схемы полного исследования функции и построение графика

1. Определяют область существования функции, которая может состоять из одного или нескольких промежутков, определяемых по возможности выполнения действий, указанных в записи функций.
2. Определяют чётность, нечётность и периодичность функции. Если выполняется условие $f(-x) = f(x)$, то функция чётная и ее график симметричен относительно оси OY .
3. Если выполняется условие $f(-x) = -f(x)$, то функция нечётная и ее график симметричен относительно начала координат.
4. Если выполняется условие $f(x+Kl) = f(x)$, где $K = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ и l – минимальный период, то функция периодическая.
5. Для такой функции достаточно построить график на одном из сегментов $[x_1; x_2]$, а на других сегментах график функции повторяется.
6. Находят точки пересечения графика данной функции с осями координат, решая системы уравнений для заданной функции $y = f(x)$ и для соответствующей оси координат.
7. Определяют поведение функции на границах области ее существования. При этом решается вопрос о горизонтальных асимптотах, уравнения которых имеют вид

$y = c$, где

Если b^x принимает два значения, то функция имеет две горизонтальные асимптоты: левую и правую. Если b^x не равно конкретному числу, то по знаку $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ определяют поведение функции при $x \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow +\infty$.

Определяют наклонные асимптоты, уравнения которых имеют вид

$$y = Kx + b, \text{ где } K = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - Kx].$$

Функция может иметь две наклонные асимптоты: левую и правую.

Это зависит от числа значений величин K и b .

Находят точки разрыва функции и исследуют поведение функции вблизи точек разрыва, вычисляя левый и правый односторонние пределы:

$$B = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ и } A = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Если хотя бы один из односторонних пределов не существует, то точка x_0 есть точка разрыва второго рода, а $x = x_0$ есть уравнение вертикальной асимптоты.

Левый и правый односторонние пределы можно вычислять только в том случае, если слева и справа от точки разрыва x_0 функция существует.

8. Определяют точки экстремума функции и вычисляют значения функции в этих точках, действуя по следующему плану:

- а) вычисляют производную функции первого порядка;
- б) определяют стационарные точки, в которых первая производная обращается в ноль или не существует;
- в) исследуют стационарные точки на экстремум, определяя знак производной слева и справа от стационарной точки;
- г) вычисляют значения функции в точках экстремума;
- д) записывают опорные точки, соответствующие точкам экстремума.

Определяют интервалы возрастания и убывания функции.

9. Определяют точки перегиба графика функции, для чего:

- а) вычисляют производную второго порядка для данной функции;
- б) определяют критические точки, в которых вторая производная обращается в ноль или не существует;
- в) исследуют критические точки, определяя знак второй производной слева и справа, от критической точки;
- г) вычисляют значения функции в этих точках;
- д) записывают точки перегиба.

10. Определяют интервалы выпуклости и вогнутости кривой заданной функции.

11. Значения аргумента и соответствующие значения функции записывают в таблицу.

12. Построение графика функции. В системе координат проводят асимптоты данной функции; наносят точки пересечения кривой с осями координат, опорные точки и точки перегиба графика функции; определяют направление кривой, учитывая интервалы возрастания, убывания, выпуклости и вогнутости кривой. Затем наносят точки, соответствующие значениям x и y таблицы, и проводят плавную кривую по отмеченным точкам, приближая ее к асимптотам. Через точки перегиба проводят короткие касательные к кривой.

Пример 1. Провести полное исследование и построить график функции $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$

1. Область определения

$$x^3 - 1 \neq 0; \quad x \neq 1, \text{ поэтому } x \in \left(-\infty; 1 \right) \cup \left(1; +\infty \right)$$

2. Пересечение с осями координат: точка $\left(0; 0 \right)$.

3. Ввиду того, что область определения несимметрична относительно начала координат, проверка на четность невозможна.

4. Интервалы знакопостоянства

Так как $x^4 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, то знак дроби $\frac{x^4}{x^3-1}$ будет зависеть только от знака знаменателя, т.е. от знака $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$. Поэтому при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$ $y < 0$, а при $x \in (1; +\infty)$ $y > 0$.

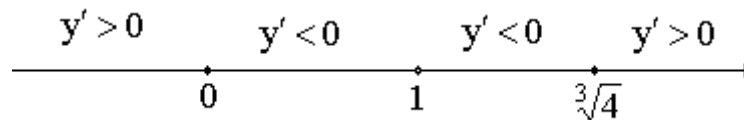
5. Интервалы монотонности

$$y' = \frac{4x^3(x^3-1) - x^4 \cdot 3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{4x^6 - 4x^3 - 3x^6}{(x^3-1)^2} = \frac{x^6 - 4x^3}{(x^3-1)^2};$$

$$x^6 - 4x^3 = 0;$$

$$x^3(x^3 - 4) = 0;$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \sqrt[3]{4}$$



При $x \in (-\infty; 0) \cup (\sqrt[3]{4}; +\infty)$ функция возрастает,

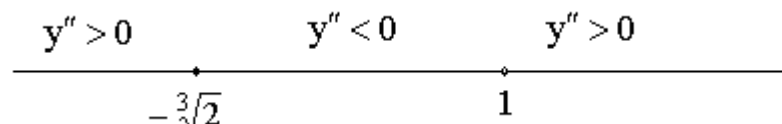
При $x \in (0; 1) \cup (1; \sqrt[3]{4})$ функция убывает.

$(0; 0)$ - точка максимума, $(\sqrt[3]{4}; \frac{4\sqrt[3]{4}}{3})$ - точка минимума.

6. Интервалы выпуклости и вогнутости:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(x^5 - 12x^2)(x^3 - 1)^2 - 6x^2(x^6 - 4x^3)(x^3 - 1)}{(x^3 - 1)^4} \\ &= 6x^2 \cdot \frac{(x^3 - 2)(x^3 - 1) - (x^6 - 4x^3)}{(x^3 - 1)^3} = 6x^2 \cdot \frac{x^6 - x^3 - 2x^3 + 2 - x^6 + 4x^3}{(x^3 - 1)^3} = \\ &= 6x^2 \cdot \frac{x^3 + 2}{(x^3 - 1)^3}; \end{aligned}$$

$$x^3 + 2 = 0; \quad x = -\sqrt[3]{2}$$



$x \in (-\infty; -\sqrt[3]{2}) \cup (1; +\infty)$ график функции вогнутый,

$x \in (-\sqrt[3]{2}; 1)$ график функции выпуклый.

$(-\sqrt[3]{2}; -\frac{2\sqrt[3]{2}}{3})$ - точка перегиба.

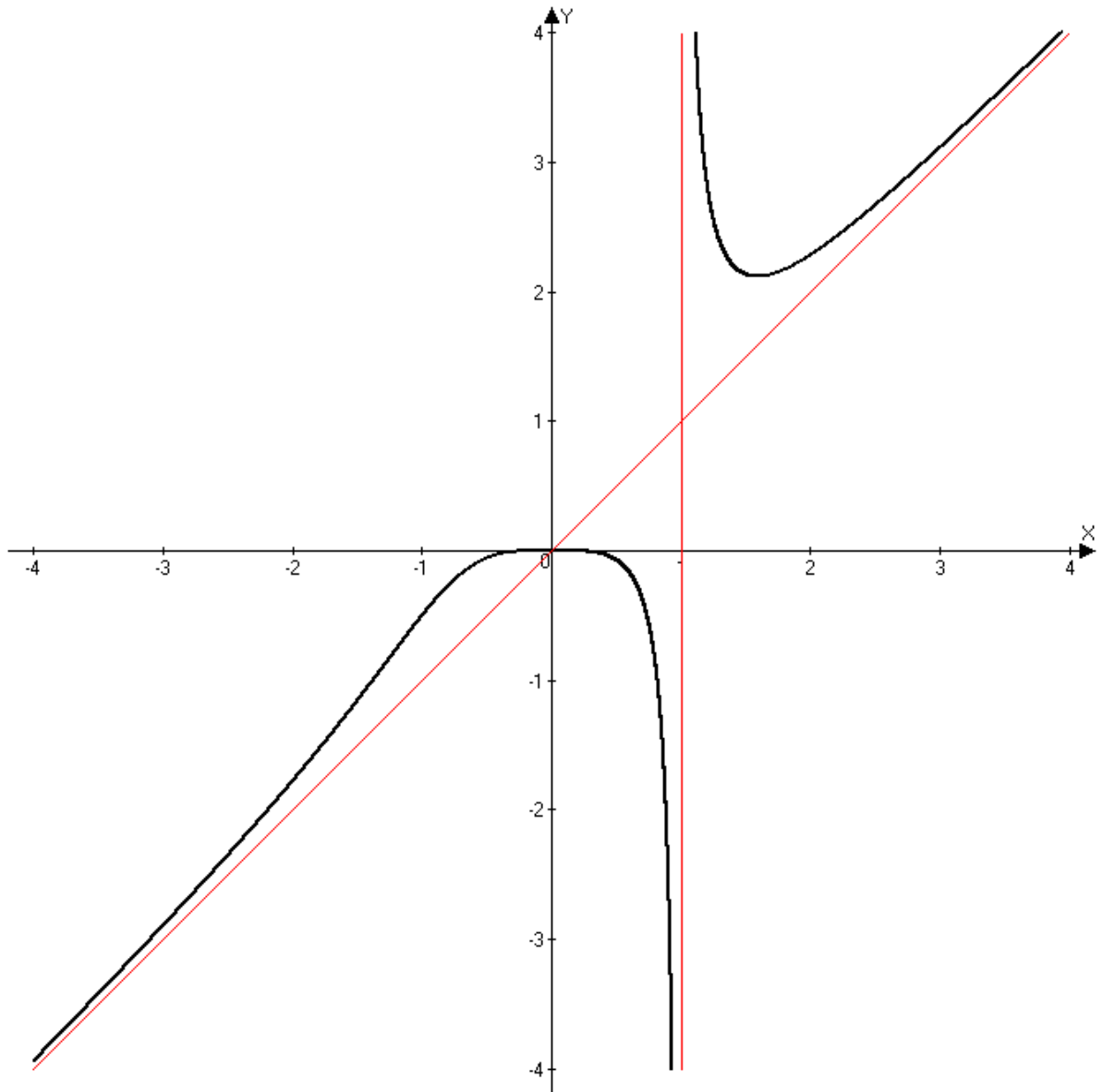
7. Асимптоты

Так как $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4}{x^3 - 1} = \infty$, то $x = 1$ - вертикальная асимптота.

Уравнение наклонной асимптоты будет искать в виде $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{x^3 - 1} = 1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4}{x^3 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^3 - 1} = 0.$$

Следовательно, $y = x$ - наклонная асимптота.



Пример 2. Провести полное исследование и построить график функции $y = \frac{5x^2}{x^2 - 9}$.

1) Область определения функции $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$.

2) Область определения функции симметрична относительно начала координат и

$$f(-x) = \frac{5(-x)^2}{(-x)^2 - 9} = \frac{5x^2}{x^2 - 9} = f(x).$$

Следовательно, функция четная, и ее график симметричен относительно оси Oy .

3) Функция имеет две точки разрыва: $x = 3$ и $x = -3$. Определим тип разрывов:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{5x^2}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{5x^2}{(x-3) \cdot (x+3)} = \\ &= \left(\frac{5 \cdot 3^2}{(3-0-3) \cdot (3-0+3)} \right) = \left(\frac{45}{(-0) \cdot 6} \right) = \left(\frac{45}{-0} \right) = -\infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{5x^2}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{5x^2}{(x-3) \cdot (x+3)} = \\ &= \left(\frac{5 \cdot 3^2}{(3+0-3) \cdot (3+0+3)} \right) = \left(\frac{45}{(+0) \cdot 6} \right) = \left(\frac{45}{+0} \right) = +\infty. \end{aligned}$$

Итак, точка $x = 3$ является точкой разрыва II рода, прямая $x = 3$ – вертикальная асимптота графика функции.

Учитывая симметрию графика функции относительно оси Oy , для точки $x = -3$ получаем:

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{5x^2}{x^2 - 9} = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{5x^2}{x^2 - 9} = -\infty.$$

Следовательно, точка $x = -3$ тоже является точкой разрыва II рода, прямая $x = -3$ – вертикальная асимптота графика функции.

4) Функция определена при сколь угодно больших x . Следовательно, возможно существование наклонных асимптот. При $x \rightarrow +\infty$ имеем:

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2}{(x^2 - 9)x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{x} \right) = 0,$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2}{x^2 - 9} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2}{x^2} \right) = 5.$$

Следовательно, прямая $y = 0 \cdot x + 5$ (т.е. прямая $y = 5$) является наклонной асимптотой правой части графика функции. Та же прямая $y = 5$ будет наклонной асимптотой и для левой части графика функции (так как график функции симметричен относительно оси Oy).

5) Найдем точки пересечения графика с осями координат. Пересечение с осью Ox :

$$y = 0 \Rightarrow \frac{5x^2}{x^2 - 9} = 0, \Rightarrow 5x^2 = 0, \\ \Rightarrow x = 0$$

Пересечение с осью Oy :

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{5 \cdot 0^2}{0^2 - 9} = 0$$

Следовательно, график функции пересекает обе координатные оси в начале координат $O(0;0)$.

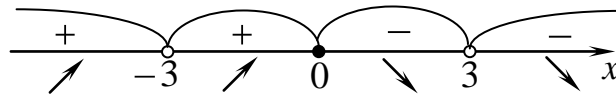
6) Найдем производную функции и критические точки первого рода. Имеем:

$$y' = \left(\frac{5x^2}{x^2 - 9} \right)' = 5 \cdot \frac{2x \cdot (x^2 - 9) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 9)^2} = -\frac{90x}{(x^2 - 9)^2},$$

$$\Rightarrow \text{а) } y' = 0 \text{ при } x = 0; \quad \text{б) } y' \neq 0 \text{ при } x = \pm 3 \notin D(y).$$

Таким образом, критической точкой первого рода является только точка $x = 0$.

Критическая точка $x = 0$ и точки разрыва $x = \pm 3$ разбивают область определения функции на четыре части. Определим знак производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, функция возрастает на интервалах $(-\infty; -3)$ и $(-3; 0)$, функция убывает на интервалах $(0; 3)$ и $(3; +\infty)$. Точка $x = 0$ – точка максимума. Максимум функции:

$$y_{\max} = y(0) = 0.$$

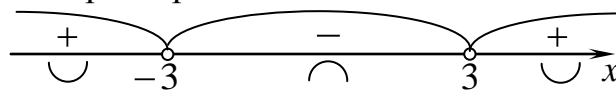
7) Найдем вторую производную функции и критические точки второго рода. Имеем:

$$y'' = \left(-\frac{90x}{(x^2 - 9)^2} \right)' = -90 \cdot \frac{1 \cdot (x^2 - 9)^2 - x \cdot 2 \cdot (x^2 - 9) \cdot 2x}{(x^2 - 9)^4} = \frac{270(x^2 + 3)}{(x^2 - 9)^3},$$

$$\Rightarrow \text{а) } y'' \neq 0 \text{ при } \forall x \in D(y); \quad \text{б) } y'' \neq 0 \text{ при } x = \pm 3 \notin D(y).$$

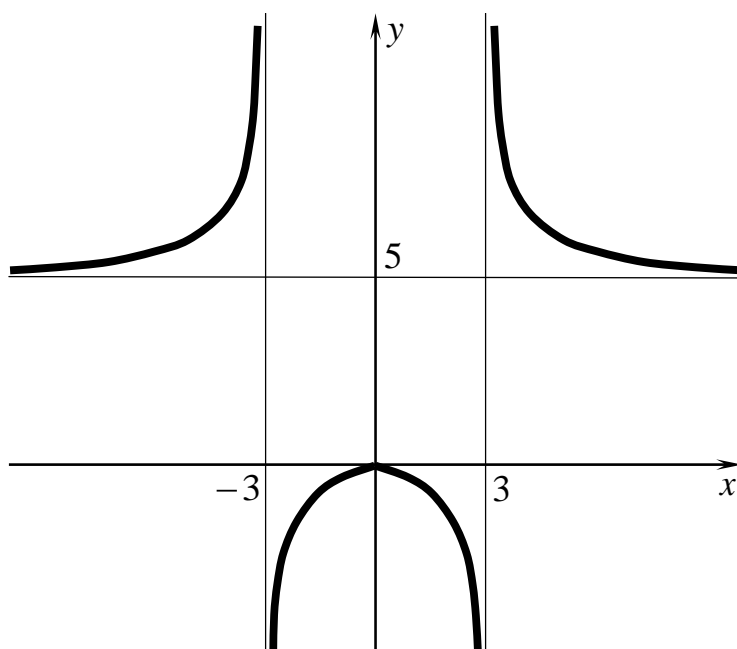
Таким образом, критических точек второго рода функция не имеет. Значит, график функции не имеет точек перегиба.

Точки разрыва $x = \pm 3$ разбивают область определения функции на три части. Определим знак второй производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, график функции выпуклый на интервале $(-3; 3)$, график функции вогнутый на интервалах $(-\infty; -3)$ и $(3; +\infty)$.

8) На основании проведенного исследования строим следующий график:



В задачах 1-32 провести полное исследование функции и построить графики

Вариант 1

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$

2. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

3. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$

Вариант 2

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

2. $y = \frac{x^2}{x-1}$

3. $y = x - \ln x + 2$

Вариант 3

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

2. $y = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$

$$3. y = x - 2 + \frac{4}{x - 2}$$

Вариант 4

Провести полное исследование функций и построить графики

$$1. y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$$

$$2. y = \frac{x^2 - 8}{x - 3}$$

$$y = \frac{4x^3}{3x^2 + 1}$$

Вариант 5

Провести полное исследование функций и построить графики

$$1. y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$$

$$2. y = \frac{x^2 + 9}{x + 4}$$

$$3. y = \frac{e^{x-1}}{x}$$

Вариант 6

Провести полное исследование функций и построить графики

$$1. y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$$

$$2. y = \frac{x^2 + 4}{x}$$

$$3. y = \frac{8x}{x - 2}^2$$

Вариант 7

Провести полное исследование функций и построить графики

$$1. y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$$

$$2. y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

$$3. y = \frac{x^2}{2x - 1}$$

Вариант 8

Провести полное исследование функций и построить графики

$$1. y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7$$

$$2. y = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$$

$$y = \ln x^2 + 2x + 2$$

Вариант 9

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32$

2. $y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$

3. $y = 2x \ln x$

Вариант 10

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20$

2. $y = \frac{x^2 - 15}{x + 4}$

3. $y = \frac{x^3}{2x - 1}^2$

Вариант 11

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 21$

2. $y = \frac{x^2 + 9}{x}$

3. $y = \frac{x^3}{3x^2 - 3}$

Вариант 12

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 2x^3 + 15x^2 + 36x + 32$

2. $y = \frac{x^2 + 8}{x + 1}$

$y = \frac{2x - 1}^2}{x^2}$

Вариант 13

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 4$

2. $y = \frac{x^2 + 21}{x - 2}$

3. $y = \frac{\sqrt{e^x}}{x}$

Вариант 14

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 61$

2. $y = \frac{x^2 + 16}{x + 3}$

3. $y = \frac{3 \ln x}{x}$

Вариант 15

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 56$

2. $y = \frac{x^2 - 12}{x - 4}$

3. $y = 4xe^{-\frac{x^2}{2}}$

Вариант 16

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 2x^3 + 15x^2 + 24x - 2$

2. $y = \frac{x^2 + 25}{x}$

3. $y = \frac{4x^3}{9(3 - x^2)}$

Вариант 17

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$

2. $y = \frac{x^2 + 24}{x + 1}$

3. $y = 4xe^{-x}$

Вариант 18

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 26$

2. $y = \frac{x^2 + 32}{x - 2}$

3. $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x^2}$

Вариант 19

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 + 3x^2 - 24x - 21$

2. $y = \frac{x^2 + 27}{x + 3}$

3. $y = \ln x^2 + 4x + 5$

Вариант 20

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 + 9x^2 + 24x + 17$

2. $y = \frac{x^2 - 7}{x - 4}$

$y = \frac{2x^2}{2x - 1}$

Вариант 21

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 4x^3 - 3x^2 - 9x - 10$

2. $y = \frac{x^2 + 3}{x - 2}$

3. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Вариант 22

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 5x^3 + 3x^2 - 9x + 3$

2. $y = \frac{x^2 - 7}{x + 6}$

3. $y = e^{2x-x^2}$

Вариант 23

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 3x^3 + 2x^2 - 8x + 5$

2. $y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

3. $y = x + \operatorname{arctg} x$

Вариант 24

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = 5x^3 + 4x^2 - 8x + 10$

2. $y = \frac{x^2 - 6}{x + 3}$

$$y = x^{\frac{2}{3}} e^{-x}$$

Вариант 25

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 + 3x^2 - 4x - 5$

2. $y = \frac{x^2 - 6}{x + 1}$

3. $y = \frac{e^x}{1 + x}$

Вариант 26

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$

2. $y = \frac{x^2 + 6}{x - 1}$

3. $y = \frac{e^x}{1 - 2x}$

Вариант 27

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$

2. $y = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$

3. $y = \frac{e^{2x}}{1 + x}$

Вариант 28

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 + 5x^2 - 7x - 5$

2. $y = \frac{x^2 - 4}{2x + 1}$

$y = \frac{2e^{-x}}{1 + x}$

Вариант 29

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 + x^2 - 3x + 5$

2. $y = \frac{3x^2 - 6}{x - 1}$

3. $y = \frac{e^x}{x}$

Вариант 30

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 + 4x^2 - 4x - 3$

2. $y = \frac{x^2 - 6x}{x + 1}$

3. $y = \frac{e^{x+1}}{1 + x}$

Вариант 31

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 + 4x^2 - 5x + 2$

2. $y = \frac{x^2 - 4}{x + 4}$

3. $y = \frac{e^x}{1 + x^2}$

Вариант 32

Провести полное исследование функций и построить графики

1. $y = x^3 + 3x^2 - 3x - 3$

2. $y = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$

$y = \frac{e^x}{3 + x}$

Задания для самостоятельной работы.

Вычислить производные следующих функций:

- | | |
|--|--|
| 1. $y = x^5 - 5x^4 + 3x^2 - 16x + 2$ | 2. $y = \frac{6}{x} - \frac{13}{x^2} - \frac{7}{x^3} - \frac{4}{5x^4}$ |
| 3. $y = 4x^{7/2} - 9x^{5/2} + 2x^{-3/2}$ | 4. $y = -6\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x^4} + \sqrt{x} + 3$ |
| 5. $y = \frac{3\cos x}{2x+1}$ | 6. $y = \arcsin(gx - 1)$ |
| 7. $y = x^2 3^x$ | 8. $y = \sqrt{x^2 + 11x - 6}$ |
| 9. $y = \sin(x+1)$ | 10. $y = \cos^3 x$ |
| 11. $y = \ln(-7x)$ | 12. $y = \sin x^2$ |
| 13. $y = 8^{\operatorname{ctgx}}$ | 14. $y = \ln(\operatorname{arctg} x - x)$ |
| 15. $y = e^{-x} \ln \operatorname{ctgx}$ | 16. $y = e^{-3x} \sin 3x$ |
| 17. $y = \frac{e^{1-2x}}{\ln \operatorname{tg} x}$ | 18. $y = \sin^8(gx)$ |
| 19. $y = \cos \ln(x - x^2)$ | 20. $y = \ln^3(x^2 - 2 \ln x)$ |
| 21. $x^3 - y^3 = x^2 y^2$ | 22. $xy = \operatorname{tgy}$ |
| 23. $y = \frac{(x-x)(x+4)}{(x-6)(x-2)}$ | 24. $y = \frac{\sqrt[5]{(x+6)(-16x)}}{\sqrt{7-6x} \sqrt[3]{(x+3)}}$ |
| 25. $y = (\cos 2x)^{\sin x}$ | 26. $y = (\ln x)^{\operatorname{ctg} 5x}$ |

Вычислить дифференциалы функций:

- | | |
|---|---------------------------|
| 27. $y = \operatorname{tg} 2x \cdot e^{2x}$ | 28. $y = \ln(x^2 + 5)$ |
| 29. $y = \sqrt{\operatorname{arctg} 3x}$ | 30. $y = x^2 \arcsin x^2$ |

Вычислить приближенные значения:

- | | |
|----------------------|---------------------|
| 31. $\sqrt[3]{8,01}$ | 32. $\cos 32^\circ$ |
| 33. $\sqrt[3]{0,96}$ | 34. $e^{0,2}$ |
| 35. $\arcsin 0,48$ | 36. $\ln 1,01$ |

Вычислить следующие пределы, применяя правило Лопиталья.

$$37. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 8x}$$

$$38. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{x^3-64}$$

$$39. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{e^x - e^{-x}}$$

$$40. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$41. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x}$$

$$42. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right)$$

$$43. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$$

$$44. \quad \lim_{x \rightarrow +0} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$45. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cdot \operatorname{ctg} x$$

$$46. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$$

$$47. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$$

$$48. \quad \lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x$$

Примерные варианты контрольной работы «Производная функции»

Вариант № 1

Найти y' :

$$1) \quad y = 0,8\sqrt[4]{x} - \frac{x^3}{0,3} + \frac{1}{5x^2};$$

$$2) \quad y = \frac{x \sin x}{1 + \operatorname{tg} x};$$

$$3) \quad y = \arccos \frac{2x-1}{\sqrt{3}};$$

$$4) \quad y = x^{\ln x}.$$

5) Найти производную функции $y=y(x)$, заданную неявно уравнением

$$xy^2 + y + x^2 = 5.$$

$$6) \quad \text{Найти } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}.$$

Вариант № 2

Найти y' :

$$1) \quad y = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^3} + 4\sqrt{5};$$

$$2) y = \frac{x \cos x}{1 + \operatorname{ctg} x};$$

$$3) y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x};$$

$$4) y = \frac{(x-2)^2 \sqrt{x+1}}{(x-5)^3}.$$

5) Найти производную функции $y=y(x)$, заданную неявно уравнением

$$y = \sin(x + y).$$

6) Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}.$

Вариант № 3

Найти y' :

$$1) y = 2x^5 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{7}};$$

$$2) y = \frac{x \operatorname{tg} x}{1 + e^x};$$

$$3) y = \arccos \frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$4) y = (\cos x)^x.$$

5) Найти производную функции $y=y(x)$, заданную неявно уравнением

$$y^3 + x^3 - 3axy = 0.$$

6) Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}.$

Вариант № 4

Найти y' :

$$1) y = 8\sqrt[4]{x} - \frac{x^3}{0,6} + \frac{4}{\sqrt[4]{x}};$$

$$2) y = \frac{x^2 \cos x}{1 + x^2};$$

$$3) y = \arcsin \frac{3x-1}{\sqrt{5}};$$

$$4) y = x^{\operatorname{ctg} x}.$$

5) Найти производную функции $y=y(x)$, заданную неявно уравнением

$$x + y = e^{x+y}.$$

6) Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

Вопросы для самоконтроля

- 1) Задача, приводящая к производной.
- 2) Определение и геометрический смысл производной.
- 3) Производная обратной и сложной функции
- 4) Основные правила дифференцирования. Правило Лопиталья.
- 6) Дифференцируемость и дифференциал. Инвариантность.
- 7) Производные параметрических и неявных функций.
- 8) Формула Лейбница. Дифференциалы высших порядков.
- 9) Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши. Геометрический смысл.
- 10) Условия монотонности функции. Необходимое и достаточное условия экстремума.
- 11) Точки перегиба. Направление выпуклости. Схема исследования функции.

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

1. $C' = 0$

2. $(CU)' = CU'$

3. $(U + V)' = U' + V'$

4. $(U \cdot V)' = U'V + UV'$

5. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

6. $X' = 1$

7. $(U^n)' = nU^{n-1} \cdot U'$

8. $(\ln U)' = \frac{U'}{U}$

9. $(a^U)' = a^U \ln a \cdot U'$

10. $(e^U)' = e^U \cdot U'$

11. $(\sin U)' = \cos U \cdot U'$

12. $(\cos U)' = -\sin U \cdot U'$

13. $(\operatorname{tg} U)' = \frac{U'}{\cos^2 U}$

14. $(\operatorname{ctg} U)' = -\frac{U'}{\sin^2 U}$

15. $(\operatorname{arcsin} U)' = \frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$

16. $(\operatorname{arccos} U)' = -\frac{U'}{\sqrt{1-U^2}}$

17. $(\operatorname{arctg} U)' = \frac{U'}{1+U^2}$

18. $(\operatorname{arcctg} U)' = -\frac{U'}{1+U^2}$

19. $(\sqrt{U})' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$

20. $\left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{U'}{U^2}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература:

1. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебн. пособие для вузов / Б.П. Демидович.- М.: ООО Издательство «АСТ», 2003.-365с.
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике в 2х частях./ Д.Т. Письменный. - М.: Айрис-пресс, 2008.-544с.
3. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016. Под редакцией Ф.Ф.Лысенко, С.Ю. Кулабухова. Москва, 2015.
4. Сканави,М. И. Сборник задач по математике/Москва-2010 г.

Дополнительная литература:

1. Боков, О.Г. Высшая математика, Раздел «Исследование функций». Обучающая программа и методические указания, 2004-21 с.
2. Пособие для подготовки к ЕГЭ по математике: Уч. пособие /Сост. Уейская Н.Б.; ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ». Саратов, 2009.
3. Руководство по выполнению заданий ЕГЭ по математике: Уч.-методическое пособие /Сост. Уейская Н.Б.; ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ». Саратов, 2012.

Содержание

Введение

Производные и их приложения

Исследование функции с помощью производной. Требования к оформлению расчетно-графических работ.

Описание схемы полного исследования функции и построение графика

Пример 1.

Пример 2.

Контрольные задания

Вопросы для самоконтроля

Список литературы