Приложение 2

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский государственный аграрный университет имени Н.И. Вавилова»

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ /Камышова Г.Н./
« 20 » июня 2016 г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Дисциплина	**МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ**
Направление подготовки	**35.04.06. Агроинженерия**
Магистерская программа	**«Инновационная агротехника»**
Квалификация (степень) выпускника	**Магистр**
Нормативный срок обучения	**2 года**
Кафедра-разработчик	**Математика и математическое моделирование**
Ведущий преподаватель	**Мавзовин В.С., доцент**

Разработчик(и): доцент, Мавзовин В.С. _____ (подпись)

Саратов 2016

Раздел 1
МОДЕЛИ И МОДЕЛИРОВАНИЕ.

(Понятие модели, виды моделирования. Этапы моделирования. Принципы моделирования)

Моделированием называют построение модели того или иного явления реального мира. В общем виде ***модель***— это абстракция реального явления, сохраняющая его существенную структуру таким образом, чтобы ее анализ дал возможность определить влияние одних сторон явления на другие или же на явления в целом. В зависимости от логических свойств и связей моделей с отображаемыми явлениями можно все модели разделить на три типа: изобразительные, аналоговые и математические.

Изобразительная модель отражает внешние характеристики явления и подобна оригиналу. Это наиболее простая и конкретная модель. Являясь в общем *описательной моделью*, она, как правило, не дает возможности установить причинные связи явления и соответственно определить или предсказать последствия изменений различных параметров явления. Характерная особенность такой модели – близкое совпадение ее свойств со свойствами отображаемого объекта. Эти свойства обычно подвергаются метрическому преобразованию, т.е. берется определенный масштаб.

В ***аналоговых моделях*** свойство данного явления отображается посредством свойств другого явления. Так, например, любая диаграмма представляет *аналоговую модель* некоторого явления. К *аналоговым моделям* относятся также морские карты, на которых совокупностью условных обозначений отображается совокупность свойств той или иной акватории. Преимущество аналоговой модели перед изобразительной состоит в том, что она позволяет отображать динамику явления. Другим преимуществом является большая универсальность этой модели: путем ее изменения можно отобразить различные процессы данного явления

Модель - упрощенное представление о реальном объекте, процессе или явлении. **Модель** - это, как правило, искусственно созданный объект в виде схемы, математических формул, физической конструкции, наборов данных и алгоритмов их обработки и т.п. **Модель** воспроизводит в специально оговоренном виде строение и свойства исследуемого объекта. Исследуемый объект, по отношению к которому изготавливается модель, называется оригиналом, образцом, прототипом. **Модель** - это объект, используемый вместо другого объекта с какой-то целью.

Моделирование — это метод познания, состоящий в создании и исследовании моделей.

Каждый объект имеет большое количество различных свойств. В процессе построения модели выделяются главные, наиболее существенные, свойства. Так, модель самолета должна иметь геометрическое подобие оригиналу, модель атома — правильно отражать физические взаимодействия, архитектурный макет города – ландшафт и т.д.

✔	**Модель** — это некий новый объект, который отражает существенные особенности изучаемого объекта, явления или процесса.

Цели моделирования.

1. понять сущность изучаемого объекта,
2. научиться управлять объектом и определять наилучшие способы управления,
3. прогнозировать прямые или косвенные последствия,
4. решать прикладные задачи.

Разные науки исследуют объекты и процессы под разным углом зрения и строят различные типы моделей. В физике изучаются процессы взаимодействия и движения объектов, в химии — их внутреннее строение, в биологии — поведение живых организмов и т.д. Возьмем в качестве примера человека, в разных науках он исследуется в рамках различных моделей. В рамках механики его можно рассматривать как материальную точку, в химии — как объект, состоящий из различных химических веществ, в биологии — как систему, стремящуюся к самосохранению и т.д. С другой стороны, разные объекты могут описываться одной моделью. Так, в механике различные материальные тела (от планеты до песчинки) могут рассматриваться как материальные точки. Один и тот же объект может иметь множество моделей, а разные объекты могут описываться одной моделью.

Словарь Уэбстера определяет модель как "упрощенное описание сложного явления или процесса"; примером может послужить компьютерная модель системы кровообращения и дыхательных путей. Этот термин является однокоренным с латинским словом modus, которое означает "образ действий либо существования; метод, форма, манера, привычка, способ или стиль". Если быть более точным, то слово "модель" происходит от латинского modulus, означающего "уменьшенный" вариант изначального способа. Так, "модель" объекта обычно представляет собой миниатюрную версию или репрезентацию этого объекта. Действующая модель (например, машины) обозначает нечто, способное выполнять ту же работу, что и сама машина, но в меньшем объеме.

Понятие "модель" со временем стало обозначать также "описание или аналогию, используемую для того, чтобы облегчить визуализацию чего-либо (например, атома), недоступного непосредственному наблюдению". Этот термин может использоваться также для обозначения "системы постулатов, данных и выводов, формального описания некого явления или положения вещей".

Таким образом, миниатюрный поезд, карта расположения основных станций или расписание поездов являются примерами различных моделей железнодорожной системы. Они служат для имитации того или иного аспекта настоящей системы, а также предоставляют полезную информацию, позволяющую повысить успешность взаимодействия с этой системой. С помощью игрушечной железной дороги, к примеру, можно оценить поведение поезда в тех или иных физических условиях. Карта важнейших железнодорожных станций позволяет наиболее эффективно построить маршрут для путешествия в тот или иной город. Расписание поездов можно использовать, чтобы рассчитать время, которое потребуется на это путешествие. С этой точки зрения, основную ценность любого типа модели представляет ее полезность.

Вопросы для самоконтроля

1. Поясните смысл таких понятий, как: метод, методика, методология, технология, способ, алгоритм, концепция, теория.
2. Метод индукции. Суть метода, назначение, примеры.
3. Метод дедукции. Суть метода, назначение, примеры.
4. Метод целеполагания. Суть метода, назначение, примеры.

Литература

а) основная литература

1. **Васильков Ю.В.** Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировани: учебник для вузов / Ю.В. Васильков, Н. Н Василькова. – М. :Финансы и статистика, 2008. – 432 с.

б) дополнительная литература

1. **Попов В.Б.** Основы компьютерных технологий: : учебник для вузов / В.Б. Попов. - М.: Финансы и статистика, 2007. – 703с.
2. **Карпова. Т.С**. Базы данных: модели, разработка, реализация / Т.С. Карпова. - СПб.: Питер, 2011. 221 с.

http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/numerics.htm
http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm

Раздел 2
КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

(Формальная классификация моделей; Классификация по способу представления объекта; Содержательные и формальные модели).

Все модели можно разбить на два больших класса: модели предметные (материальные) и модели информационные.

Предметные модели воспроизводят геометрические, физические и другие свойства объектов в материальной форме (глобус, анатомические муляжи, модели кристаллических решеток, макеты зданий и сооружений и др.). Информационные модели представляют объекты и процессы в образной или знаковой форме. **Образные модели** (рисунки, фотографии и др.) представляют собой зрительные образы объектов, зафиксированные на каком-либо носителе информации (бумаге, фото- и кинопленке и др.). Широко используются образные информационные модели в образовании (учебные плакаты по различным предметам) и науках, где требуется классификация объектов по их внешним признакам (в ботанике, биологии, палеонтологии и др.). **Знаковые информационные модели** строятся с использованием различных языков (знаковых систем). Знаковая информационная модель может быть представлена в форме текста (например, программы на языке программирования), формулы (например, второго закона Ньютона $F = ma$), таблицы (например, периодической таблицы элементов Д. И. Менделеева) и так далее. Иногда при построении знаковых информационных моделей используются одновременно несколько различных языков. Примерами таких моделей могут служить географические карты, графики, диаграммы и пр. Во всех этих моделях используются одновременно как язык графических элементов, так и символьный язык.

Модели играют чрезвычайно важную роль в организации деятельности человека, поэтому были выделены два основных типа моделей познавательные и прагматические, соответствующие делению целей деятельности человека на теоретические и практические.

Типы моделей:

1. Познавательная модель – форма организации и представления знаний, средство соединения новых и старых знаний. Данная модель подгоняется под реальность и является теоретической моделью.

2. Прагматическая модель – средство организации практических действий и рабочего представления целей системы для ее упрощения. В таких моделях реальность подгоняется под модель, которая носит нормативный характер, играет роль стандарта. Такие модели являются прикладными. Примерами прагматичных моделей являются планы и программы действий, уставы учреждений, кодексы законов и т. д.

То есть, основное различие познавательной и прагматической моделей в том, что познавательные модели отражают существующие, а прагматические – не существующие, но желаемые и, возможно, осуществимые отношения и связи. Кроме основных двух типов выделяют отдельный тип моделей, называемый инструментальным.

3. Инструментальная модель – является средством построения, исследования или использования прагматической или познавательной модели.

Данная классификация, то есть деление моделей на три типа не всегда может использоваться с успехом. Допустим такие модели как детские игрушки, карты местности, медицинские модели нельзя отнести ни к одному из описанных нами типов. Поэтому существует еще одна классификация, подразделяющая модели на определенные виды.

Формализация. На протяжении своей истории человечество использовало различные способы и инструменты для создания информационных моделей. Так, первые информационные модели создавались в форме наскальных рисунков, в настоящее же время информационные модели обычно строятся и исследуются с использованием современных компьютерных технологий. Процесс построения информационных моделей с помощью формальных языков называется формализацией. Естественные языки используются для создания описательных информационных моделей. В истории науки известны многочисленные описательные информационные модели. Например, гелиоцентрическая модель мира, которую предложил Коперник, формулировалась следующим образом: Земля вращается вокруг своей оси и вокруг Солнца; орбиты всех планет проходят вокруг Солнца. С помощью формальных языков строятся формальные информационные модели (математические, логические и др.). Одним из наиболее широко используемых формальных языков является математика. Модели, построенные с использованием математических понятий и формул, называются математическими моделями. Язык математики является совокупностью формальных языков.

Визуализация В процессе исследования формальных моделей часто производится их визуализация. Для визуализации алгоритмов используются блок-схемы: пространственных соотношений между объектами — чертежи, моделей электрических цепей — электрические схемы, логических моделей устройств — логические схемы и так далее. Так при визуализации формальных физических моделей с помощью анимации может отображаться динамика процесса, производиться построение графиков изменения физических величин и так далее. Визуальные модели обычно являются интерактивными, то есть исследователь может менять начальные условия и параметры протекания процессов и наблюдать изменения в поведении модели.

Основные этапы разработки и исследования моделей на компьютере Использование компьютера для исследования информационных моделей различных объектов и систем позволяет изучить их изменения в зависимости от значения тех или иных параметров. Компьютерное моделирование является одним из эффективных методов изучения сложных систем. Часто компьютерные модели проще и удобнее исследовать, они позволяют проводить вычислительные эксперименты, реальная постановка которых затруднена или может дать непредсказуемый результат. Процесс разработки моделей и их исследования на компьютере можно разделить на несколько основных этапов: Построение описательной информационной модели (выделение существенных параметров). Создание формализованной модели (запись формул). Построение компьютерной модели. Компьютерный эксперимент. Анализ полученных результатов и корректировка исследуемой модели. На первом этапе исследования объекта или процесса обычно строится описательная информационная модель. Такая модель выделяет существенные с точки зрения целей проводимого исследования параметры объекта, а несущественными параметрами пренебрегает. На втором этапе создается формализованная модель, то есть описательная информационная модель записывается с помощью какого-либо формального языка. В такой модели с помощью формул, уравнений, неравенств и пр. фиксируются формальные соотношения между начальными и конечными значениями свойств объектов, а также накладываются ограничения на допустимые значения этих свойств. Однако далеко не всегда удается найти формулы явно выражающие искомые величины через исходные данные. В таких случаях используются приближенные математические методы, позволяющие получать результаты с заданной точностью. На третьем этапе необходимо формализованную информационную модель преобразовать в компьютерную на понятном для компьютера языке. Существуют два принципиально различных пути построения компьютерной модели: 1) создание алгоритма решения задачи и его кодирование на одном из языков программирования; 2) формирование компьютерной модели с использованием одного из приложений (электронных таблиц, СУБД и т. д.). В процессе создания компьютерной модели полезно разработать удобный графический интерфейс, который позволит визуализировать формальную модель, а также реализовать интерактивный диалог человека с компьютером на этапе исследования модели. Четвертый этап исследования информационной модели состоит в проведении компьютерного эксперимента. Если компьютерная модель существует в виде программы на одном из языков программирования, ее нужно запустить на выполнение и получить результаты. Если компьютерная модель исследуется в приложении, например в электронных таблицах, можно провести сортировку или поиск данных, построить диаграмму или график и так далее. Пятый этап состоит в анализе полученных результатов и корректировке исследуемой модели. В случае различия результатов, полученных при исследовании информационной модели, с измеряемыми параметрами реальных объектов можно сделать вывод, что на предыдущих этапах построения модели были допущены ошибки или неточности. Например, при построении описательной качественной модели могут быть неправильно отобраны существенные свойства объектов, в процессе формализации могут быть допущены ошибки в формулах и так далее. В этих случаях необходимо провести корректировку модели, причем уточнение модели может проводиться многократно, пока анализ результатов не покажет их соответствие изучаемому объекту.

Классификация систем и их моделей.

В зависимости от признаков системы, сами системы и их модели классифицируются на:

1) динамические и статические;
2) стохастические (вероятностные) и детерминированные (регулярные);
3) непрерывные и дискретные;
4) линейные и нелинейные.

По наличию обратных связей системы подразделяются на открытые, закрытые, комбинированные.

Формальная классификация моделей.

Признак классификации	**Модель**
1. Целевое назначение	Прикладные, теоретико-аналитические
2. По типу связей	Детерминированные, стохастические
3. По фактору времени	Статические, динамические

4. По форме показателей	Линейные, нелинейные
5. По соотношению экзогенных и эндогенных переменных	Открытые, закрытые
6. По типу переменных	Дискретные, непрерывные, смешанные
7. По степени детализации	Агрегированные (макромодели), детализированные (микромодели)
8. По количеству связей	Одноэтапные, многоэтапные
9. По форме представления информации	Матричные, сетевые
10. По форме процесса	Аналитические, графические, логические
11. По типу математического аппарата	Балансовые, статистические, оптимизационные, имитационные, смешанные

Вопросы для самоконтроля

1. Синтез. Суть метода, назначение, примеры.
2. Метод обобщения. Суть метода, назначение, примеры.
3. Наблюдение. Суть метода, назначение, примеры.
4. Формализация. Суть понятия, назначение, примеры.
5. Классификация. Суть метода, назначение, примеры.
6. Аналогия. Суть метода, назначение, примеры.

?

Литература

а) основная литература

1. **Васильков Ю.В.** Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировани: учебник для вузов / Ю.В. Васильков, Н. Н Василькова. – М. :Финансы и статистика, 2008. – 432 с.

б) дополнительная литература

1. **Попов В.Б.** Основы компьютерных технологий: : учебник для вузов / В.Б. Попов. - М.: Финансы и статистика, 2007. – 703с.
2. **Карпова. Т.С**. Базы данных: модели, разработка, реализация / Т.С. Карпова. - СПб.: Питер, 2011. 221 с.

http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/numerics.htm
http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm

Раздел 3.
ТИПОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СХЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ.

(Виды математических моделей. Жизненный цикл моделируемой системы.)

Виды моделей

Математическое моделирование - метод качественного и (или) количественного описания процесса с помощью, так называемой математической модели, при построении которой реальный процесс или явление описывается с помощью того или иного адекватного математического аппарата. Математическое моделирование является неотъемлемой частью современного исследования.

Математическое моделирование является типичной дисциплиной, находящейся, как сейчас часто говорят, на "стыке" нескольких наук. Адекватная математическая модель не может быть построена без глубокого знания того объекта, который "обслуживается" математической моделью. Иногда высказывается иллюзорная надежда, что математическая модель может быть создана совместно математиком, не знающим объекта моделирования, и специалистом по "объекту", не знающим математики. Для успешной деятельности в области математического моделирования необходимо знать как математические методы, так и объект моделирования. С этим связано, например, наличие такой специальности как физик теоретик, основной деятельностью которого является математическое моделирование в физике. Разделение специалистов на теоретиков и экспериментаторов, утвердившееся в физике, несомненно, произойдет и в других науках, как фундаментальных, так и прикладных.

Классификация математических моделей.

Ввиду разнообразия применяемых математических моделей, их общая классификация затруднена. В литературе обычно приводят классификации, в основу которых положены различные подходы. Один из таких подходов связан с характером моделируемого процесса, когда выделяют детерминированные и вероятностные модели. Наряду с такой широко распространенной классификацией математических моделей существуют и другие.

Классификация математических моделей на основе особенностей применяемого математического аппарата**.** В ней можно выделить следующие их разновидности.

Математические модели с сосредоточенными параметрами.

Обычно с помощью таких моделей описывают динамику систем, состоящих из дискретных элементов. С математической стороны - это системы обыкновенных линейных или нелинейных дифференциальных уравнений.

Математические модели с сосредоточенными параметрами широко применяются для описания систем, состоящих из дискретных объектов или совокупностей идентичных объектов. Например, широко используется динамическая модель полупроводникового лазера. В этой модели фигурируют две динамические переменные - концентрации неосновных носителей заряда и фотонов в активной зоне лазера.

В случае сложных систем число динамических переменных и, следовательно, дифференциальных уравнений может быть велико (до 10^2... 10^3). В этих случаях полезны различные методы редукции системы, основанные на временной иерархии процессов, оценке влияния различных факторов и пренебрежении несущественными среди них и др.

Метод последовательного расширения модели может привести к созданию адекватной модели сложной системы.

Математические модели с распределенными параметрами.

Моделями этого типа описываются процессы диффузии, теплопроводности, распространения волн различной природы и т. п. Эти процессы могут быть не только физической природы. Математические модели с распределенными параметрами широко распространены в биологии, физиологии и других науках. Чаще всего в качестве основы математической модели применяют уравнения математической физики, в том числе и нелинейные.

Математические модели, основанные на экстремальных принципах.

Общеизвестна основополагающая роль принципа наибольшего действия в физике. Например, все известные системы уравнений, описывающие физические процессы, могут быть выведены из экстремальных принципов. Однако и в других науках экстремальные принципы играют существенную роль.

Экстремальный принцип используется при аппроксимации эмпирических зависимостей аналитическим выражением. Графическое изображение такой зависимости и конкретный вид аналитического выражения, описывающего эту зависимость, определяют с помощью экстремального принципа, получившего название метода наименьших квадратов (метод Гаусса), суть которого заключается в следующем.

Пусть проводится опыт, целью которого является исследование зависимости некоторой физической величины *Y* от физической величины *X*. Предполагается, что величины *x и y* связаны функциональной зависимостью

$$y=\varphi(x).$$

Вид этой зависимости и требуется определить из опыта. Предположим, что в результате опыта получили ряд экспериментальных точек и построили график зависимости *y* от *x*. Обычно экспериментальные точки на таком графике располагаются не совсем правильно, дают некоторый разброс, т. е. обнаруживают случайные отклонения от видимой общей закономерности. Эти отклонения связаны с неизбежными при всяком опыте ошибками измерения. Тогда возникает типичная для практики задача сглаживания экспериментальной зависимости.

Для решения этой задачи обычно применяется расчетный метод, известный под названием метода наименьших квадратов (или метод Гаусса).

Разумеется, перечисленные разновидности математических моделей не исчерпывают весь математический аппарат, применяемый в математическом моделировании. Особенно разнообразен математический аппарат теоретической физики и, в частности, ее важнейшего раздела - физики элементарных частиц.

Основной принцип классификации математических моделей

В качестве основного принципа классификации математических моделей часто используют области их применения. При таком подходе выделяются следующие области применения:

физические процессы;

технические приложения, в том числе управляемые системы, искусственный интеллект;

жизненные процессы (биология, физиология, медицина);

большие системы, связанные с взаимодействием людей (социальные, экономические, экологические);

гуманитарные науки (языкознание, искусство).

(Области применения указаны в порядке, соответствующем убыванию уровня адекватности моделей).

Виды математических моделей: детерминированные и вероятностные, теоретические и экспериментальные факторные. Линейные и нелинейные, динамические и статические. непрерывные и дискретные, функциональные и структурные.

По форме представления математических моделей различают инвариантную, алгоритмическую, аналитическую и графическую модели объекта проектирования.

Классификация математических моделей (ТО - технический объект)

Виды математических моделей технических объектов

По форме представления ММ	По характеру отображаемых свойств ТО	По степени абстрагирования	По способу получения ММ
Инвариантные	Функциональные	ММ микроуровня (с распределенными параметрами)	Теоретические
Алгоритмические	Структурные	ММ макроуровня (со средоточенными параметрами)	Экспериментальные факторные
Аналитические		ММ метауровня	
Графические (схемные)			

Структура модели - это упорядоченное множество элементов и их отношений. Параметр - это величина, характеризующая свойство или режим работы объекта. Выходные параметры характеризуют свойства технического объекта, а внутренние параметры - свойства его элементов. Внешние параметры - это параметры внешней Среды, оказывающей влияние на функционирование технического объекта.

К математическим моделям предъявляются требования адекватности, экономичности, универсальности. Эти требования противоречивы.

В зависимости от степени абстрагирования при описании физических свойств технической системы различают три основных иерархических уровня: верхний или метауровень, средний или макроуровень, нижний или микроуровень.

Метауровень соответствует начальным стадиям проектирования, на которых осуществляется научно-техническский1 поиск и прогнозирование, разработка концепции и технического решения, разработка технического предложения. Для построения математических моделей метауровня используют методы морфологического синтеза, теории графов, математической логики, теории автоматического управления, теории массового обслуживания, теории конечных автоматов.

На макроуровне объект рассматривается как динамическая система с сосредоточенными параметрами. Математические модели макроуровня представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти модели используют при определении параметров технического объекта и его функциональных элементов.

На микроуровне объект представляется как сплошная Среда с распределенными параметрами. Для описания процессов функционирования таких объектов используют дифференциальные уравнения в частных производных. На микроуровне проектируют неделимые по функциональному признаку элементы технической системы, называемые базовыми элементами. При этом базовый элемент рассматривается как система, состоящая из множества однотипных функциональных элементов одной и той же физической природы, взаимодействующих между собой и находящихся под воздействием внешней Среды и других элементов технического объекта, являющихся внешней средой по отношению к базовому элементу.

По форме представления математических моделей различают инвариантную, алгоритмическую, аналитическую и графическую модели объекта проектирования.

В инвариантной форме математическая модель представляется системой уравнений вне связи с методом решения этих уравнений.

В алгоритмической форме соотношения модели связаны с выбранным численным методом решения и записаны в виде алгоритма - последовательности вычислений. Среди алгоритмических моделей выделяют имитационные , модели предназначенные для имитации физических и информационных процессов, протекающих в объекте при его функционировании под воздействием различных факторов внешней среды.

Аналитическая модель представляет собой явные зависимости искомых переменных от заданных величин (обычно зависимости выходных параметров объекта от внутренних и внешних параметров). Такие модели получают на основе физических законов, либо в результате прямого интегрирования исходных дифференциальных уравнений. Аналитические математические модели позволяют легко и просто решать задачи определения оптимальных параметров. Поэтому, если представляется возможность получения модели в таком виде, ее всегда целесообразно реализовать, даже если при этом придется выполнить ряд вспомогательных процедур, Такие модели обычно получают методом планирования эксперимента (вычислительного или физического).

Графическая (схемная) модель представляется в виде графов, эквивалентных схем, динамических моделей, диаграмм и т.п. Для использования графических моделей должно существовать правило однозначного соответствия условных изображений элементов графической и компонентов инвариантной математических моделей.

Деление математических моделей на функциональные и структурные определяется характером отображаемых свойств технического объекта.

Структурные модели отображают только структуру объектов и используются только при решении задач структурного синтеза. Параметрами структурных моделей являются признаки функциональных или конструктивных элементов, из которых состоит технический объект и по которым один вариант структуры объекта отличается от другого. Эти параметры называют морфологическими перемененными. Структурные модели имеют форму таблиц, матриц и графов. Наиболее перспективно применение древовидных графов типа И-ИЛИ-дерева. Такие модели широко используют на метауровне при выборе технического решения.

Функциональные модели описывают процессы функционирования технических объектов и имеют форму систем уравнений. Они учитывают структурные и функциональные свойства объекта и позволяют решать задачи как параметрического, так и структурного синтеза. Их широко используют на всех уровнях проектирования. На метауровне функциональные задачи позволяют решать задачи прогнозирования, на макроуровне - выбора структуры и оптимизации внутренних параметров технического объекта, на микроуровне - оптимизации параметров базовых элементов.

ПО способам получения функциональные математические модели делятся на теоретические и экспериментальные.

Теоретические модели получают на основе описания физических процессов функционирования объекта, а экспериментальные - на основе поведения объекта во внешней среде, рассматривая его как “черный ящик”. Эксперименты при этом могут быть физические (на техническом объекте или его физической модели) или вычислительные (на теоретической математической модели).

При построении теоретических моделей используется физический и формальный подходы.

Физический подход сводится к непосредственному применению физических законов для описания объектов, например, законов Ньютона, Гука, Кирхгофа и т.д.

Формальный подход использует общие математические принципы и применяется при построении как теоретических, так и экспериментальных моделей. Экспериментальные модели - формальные. Они не учитывают всего комплекса физических свойств элементов исследуемой технической системы, а лишь устанавливают обнаруживаемую в процессе эксперимента связь между отдельными параметрами системы, которые удается варьировать и (или) осуществлять их измерение. Такие модели дают адекватное описание исследуемых процессов лишь в ограниченной области пространства параметров, в которой осуществлялось варьирование параметров в эксперименте. Поэтому экспериментальные математические модели носят частный характер, в то время как физические законы отражают общие закономерности явлений и процессов, протекающих как во всей технической системе, так и в каждом ее элементе в отдельности. Следовательно, экспериментальные математические модели не могут быть приняты в качестве физических законов. Вместе с тем методы, применяемые для построения этих моделей широко используются при проверке научных гипотез.

Функциональные математические модели могут быть линейные и нелинейные. Линейные модели содержат только линейные функции величин, характеризующих состояние объекта при его функционировании, и их производных. Характеристики многих элементов реальных объектов нелинейные. Математические модели таких объектов включают нелинейные функции этих величин и их производных и относятся к нелинейным.

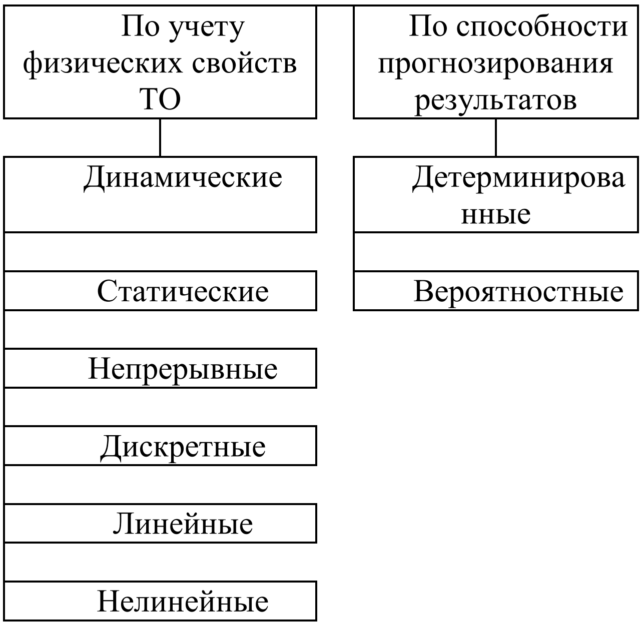
Если при моделировании учитываются инерционные свойства объекта и (или) изменение во времени объекта или внешней Среды, то модель называют динамической. В противном случае модель - статическая. Математическое представление динамической модели в общем случае может быть выражено системой дифференциальных уравнений, а статической - системой алгебраических уравнений.

Если воздействие внешней Среды на объект носит случайный характер и описывается случайными функциями. В этом случае требуется построение вероятностной математической модели. Однако такая модель весьма сложная и ее использование при проектировании технических объектов требует больших затрат машинного времени. Поэтому ее применяют на заключительном этапе проектирования.

Большинство проектных процедур выполняется на детерминированных моделях. Детерминированная математическая модель характеризуется взаимно однозначным соответствием между внешним воздействием на динамическую систему и ее реакцией на это воздействие. В вычислительном эксперименте при проектировании обычно задают некоторые стандартные типовые воздействия на объект: ступенчатые, импульсные, гармонические, кусочно-линейные, экспоненциальные и др. Их называют тестовыми воздействиями.

“Классификация математических моделей

Виды математических моделей технических объектов



1. Статическая модель. Модель называется статической, если не имеет временного параметра. Статическая модель может каждый момент времени дать лишь один срез системы, то есть она не изменяется. Пример: фотография.

2. Динамическая модель. Модель называется динамической, если имеет временной параметр, то есть она отображает систему во времени. Пример: киносъемка.

3. Дискретная модель. Модель называется дискретной, если она описывает поведение системы только в дискретные моменты времени.

4. Непрерывная модель. Модель называется непрерывной, если она описывает поведение системы для всех моментов времени из некоторого промежутка времени.

5. Имитационная модель. Модель называется имитационной, если она предназначена для испытания или изучения, проигрывания возможных путей развития и поведения объекта, путем варьирования некоторых или всех параметров объекта.

6. Детерминированная модель. Модель называется детерминированной, если каждому входному набору параметров соответствует вполне определенный и однозначный набор выходных параметров. В противном случаи модель называется недетерминированной или стохастической (вероятностной). То если мы бросаем камень и хотим рассчитать расстояние, на которое он улетит, не учитывая случайных помех, модель будет детерминированной, если же мы возьмем в расчет, допустим, внезапный порыв ветра, модель станет стохастической.

Кроме того, каждая модель имеет свои свойства:

1. Целенаправленность (модель всегда отражает какую-либо систему, то есть имеет цель).

2. Конечность (модель изображает оригинал лишь в конечном числе его отношений).

3. Упрощенность (модель отражает только существенные стороны объекта).

4. Приблизительность (действительность отражается моделью грубо и приблизительно).

5. Адекватность (модель должна успешно описывать моделируемую систему).

6. Информативность (модель должна содержать достаточную информацию об объекте или системе).

Жизненный цикл моделируемой системы

1. Сбор информации об объекте, выдвижение гипотез, предмоделируемый анализ.
2. Проектирование структуры и состава модели.
3. Построение спецификации модели, разработки и отладки отдельных подмоделей.
4. Сборка модели в целом и идентификация параметров моделей.
5. Исследование модели, то есть выбор методов исследования и разработка алгоритмов моделирования.
6. Исследование адекватности и устойчивости модели.
7. Оценка средств моделирования.
8. Интерпретация, анализ результатов моделирования и установление некоторых причинно-следственных связей в исследуемой системе.
9. Генерация отчетов и проектных решений.
10. Уточнения, модификация модели, если это необходимо, и возврат к исследуемой системе с новыми знаниями, полученными с помощью моделирования.

Вопросы для самоконтроля

1. Научная гипотеза. Понятие, требования, предъявляемые к выдвигаемым гипотезам.
2. Эксперимент. Понятие, виды экспериментов. Планирование эксперимента (кратко описать суть этапов эксперимента на примере магистерской работы).
3. Процесс научного познания, кратко описать этапы (согласно схеме).
4. Поясните кратко суть категориально-системной методологии.
5. Понятие интеллектуальной карты, назначение, виды, примеры.

6. Понятие триады, триадический подход в исследованиях, способы построения триад для выявления противоречий и пр.
7. Выявление противоречий как метод познания.

Литература

а) основная литература

1. **Васильков Ю.В.** Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировани: учебник для вузов / Ю.В. Васильков, Н. Н Василькова. – М. :Финансы и статистика, 2008. – 432 с.

б) дополнительная литература

1. **Попов В.Б.** Основы компьютерных технологий: : учебник для вузов / В.Б. Попов. - М.: Финансы и статистика, 2007. – 703с.
2. **Карпова. Т.С**. Базы данных: модели, разработка, реализация / Т.С. Карпова. - СПб.: Питер, 2011. 221 с.

http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/numerics.htm
http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm

Раздел 4.
ЭКСПЕРИМЕНТЫ С МОДЕЛЯМИ.

(Обработка результатов моделирования. Методы планирования эксперимента с моделями. Точность и достоверность результатов моделирования. Алгоритм научных исследований с помощью математического моделирования.)

Основные операции при работе с моделями

1. Идентификация – решение задачи построения по результатам наблюдения математических моделей, описывающих адекватно поведение реальной системы.
2. Агрегирование – операция состоит в преобразовании модели к модели меньшей размерности.
3. Декомпозиция – разделение системы на подсистемы с сохранением структур и принадлежностей одних элементов и подсистем другим элементам.
4. Сборка – преобразование системы. Реализующей поставленную цель из заданных или определенных подмоделей.
5. Макетирование – исследование структурной связанности, сложности, устойчивости с помощью макетов.
6. Экспертиза и экспертное оценивание – процедура использование опыта. Интеллекта экспертов для исследования или моделирования плохо структурированных подсистем исследовательской системы.
7. Вычислительный эксперимент – осуществляется с помощью модели на ЭВМ. С целью распределения прогноза тех или иных состояний системы, реакция на те или иные входные сигналы.

Создание модели

Модель может быть создана двумя способами:

1. Изоморфизм – взаимно однозначное соответствие объекта и модели.

2. Гомоморфизм – отображение части свойств объекта на основе модели. Если множество значимых для анализа свойств объекта шире гомоморфизма, то объект и модель не адекватны.

После создания модели выбирается целесообразные воздействия на объект путем исследования динамики модели и прогноза ее реакции.

Выбранное воздействие применяется к объекту или среде, которую тоже моделируют. При возникновении предпосылок к тому, что модель не адекватна к объекту. Возникает необходимость корректировки модели, но если усилия по корректировке не приводят к желаемому результату, то попытки его достигнуть прекращаются.

Построение принципиально новой модели носит характер открытия.

Вопросы для самоконтроля

1. Когнитивное моделирование, суть, назначение, способы построения когнитивных карт (с использованием импульсного моделирования, с использованием теории противоборств).
2. Основные принципы системного анализа.
3. Приведите основные понятия теории моделирования систем: модель, гипотеза, аналогия, эксперимент и т.п.

Литература

а) основная литература

1. **Васильков Ю.В.** Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировани: учебник для вузов / Ю.В. Васильков, Н. Н Василькова. – М. :Финансы и статистика, 2008. – 432 с.

б) дополнительная литература

1. **Попов В.Б.** Основы компьютерных технологий: : учебник для вузов / В.Б. Попов. - М.: Финансы и статистика, 2007. – 703с.
2. **Карпова. Т.С**. Базы данных: модели, разработка, реализация / Т.С. Карпова. - СПб.: Питер, 2011. 221 с.

http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/numerics.htm
http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm

Раздел 5.
МОДЕЛИ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ.

(Характеристики непрерывных систем. Линеаризация дифференциальных уравнений. Математическое и программное обеспечение эксперимента)

Непрерывное имитационное моделирование

В непрерывной имитационной модели состояние системы представляется с помощью непрерывно изменяющихся зависи мых переменных. Для того чтобы отличать непрерывно изме няющиеся переменные от дискретно изменяющихся, будем первые называть переменными состояния [2]. Непрерывная имита ционная модель создается путем задания уравнений для сово купности переменных состояния, динамическое поведение ко торых имитирует реальную систему.

Линеаризация дифференциальных уравнений

Будем рассматривать малые отклонения переменных $\boldsymbol{\theta}$ и $\dot{\boldsymbol{\theta}}$, когда приближенно можно принять: $\sin\boldsymbol{\theta} \approx \boldsymbol{\theta};\ \cos\boldsymbol{\theta} \approx 1;\ \dot{\boldsymbol{\theta}}^2 \approx 0.$ Пренебрегая малыми величинами высших порядков, вместо нелинейных уравнений (2.7) получим линейные (линеаризованные) уравнения в символьном виде:

$$\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\theta}};\quad \frac{d\dot{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = \frac{(M+m)g\boldsymbol{\theta} - f}{lM};\quad \frac{dx}{dt} = \dot{x};\quad \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{f - mg\boldsymbol{\theta}}{M}. \qquad (2.8)$$

Запишем линейную систему (2.8) в матричной форме с использованием вектора состояний $\mathbf{v} = (\boldsymbol{\theta} \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad x \quad \dot{x})'$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\theta}\\ \dot{\boldsymbol{\theta}}\\ x\\ \dot{x}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ \dfrac{m+M}{lM}g & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\dfrac{mg}{M} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\boldsymbol{\theta}\\ \dot{\boldsymbol{\theta}}\\ x\\ \dot{x}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ -\dfrac{1}{lM}\\ 0\\ \dfrac{1}{M}\end{bmatrix} f; \qquad (2.9)$$

$$x = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\boldsymbol{\theta}\\ \dot{\boldsymbol{\theta}}\\ x\\ \dot{x}\end{bmatrix} + 0 \cdot f. \qquad (2.10)$$

Получена линейная модель в так называемой форме пространства состояний

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}f;\quad x = \mathbf{C}\mathbf{v} + Df.$$

Первое из этих уравнений называется *уравнением состояний*, второе — *уравнением выхода*. Матричная форма пространства состояний является стандартом для анализа линейных стационарных систем (типа LTI — *Linear Time-Invariant*). Для моделей класса LTI разработано большое количество методов, алгоритмов и программ анализа и синтеза систем управления. Такая форма принята как одна из основных в программе MATLAB/Control System Toolbox фирмы The MathWorks, Inc. В уравнении выхода (2.10) за выход объекта — измеряемую непосредственно переменную принято положение каретки, т. е.

скаляр. Поэтому матрица выхода **C** оказывается строкой. Если за выход принимать вектор $(\boldsymbol{\theta}\quad x)'$, то матрица выхода будет иметь две строки $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$, а матрица обхода получится столбцовой $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$. Когда интересуются нижним положением равновесия маятника, т. е. начало отсчета углов внизу, некоторые элементы матриц **A** и **B** изменят знаки.

Методологическое обеспечение системы автоматизации экспериментальных исследований включает в себя:

- выбор пути решения поставленной задачи исследования;

- разработку соответствующих методов исследования,позволяющих извлекать необходимую информацию, проверять ее достоверность и отображать в удобной для использования форме;

формулировку исходных гипотез и модельных представлений в целях интерпретации получаемых результатов.

Методологическое обеспечение системы автоматизации экспериментальных исследований должно быть ориентировано на углубленное изучение явлений и процессов, повышение достоверности, качества, научной значимости и информативности получаемых результатов. Это может быть достигнуто лишь при учете в процессе разработки методологического обеспечения системы автоматизации экспериментальных исследований всех особенностей и возможностей автоматизированного исследования.

Использование в системах автоматизации экспериментальных исследований традиционной методологии, разработанной применительно к неавтоматизированным исследованиям, зачастую не позволяет выполнить указанные требования и значительно снижает эффективность от применения систем автоматизации экспериментальных исследований.

Методологическое обеспечение, реализованное в виде методик и алгоритмов обработки измерительной информации, ее интерпретации, обобщения и отображения, а также алгоритмов управления ходом эксперимента, составляет математическое обеспечение системы автоматизации экспериментальных исследований. Выполнение требований, предъявляемых к методологическому обеспечению системы автоматизации экспериментальных исследований, во многом определяется качеством математического обеспечения. Удовлетворение этим требованиям достигается широким использованием аппарата вычислительной математики и математической статистики, привлечением усложненных математических моделей для идентификации и интерпретации экспериментальных данных,использованием тонких методов расчета процессов на основе таких моделей.

Состав математического обеспечения системы автоматизации экспериментальных исследований зависит от задач исследования и может включать в себя:

- тарировочные зависимости для датчиков;
- алгоритмы переработки первичной информации в целях определения искомых величин;
- методики периодического тестирования и калибровки измерительных трактов в целях повышения точности обработки результатов эксперимента;
- алгоритмы проверки достоверности полученных результатов и отбраковки ошибочных данных;

- алгоритмы аппроксимации опытных данных уравнениями регрессии с последующим статистическим обоснованием полученной зависимости;
- банк математических моделей для идентификации изучаемого явления и алгоритмы для проверки адекватности моделей;
- алгоритмы управления ходом эксперимента в соответствии с тем или иным планом его проведения и т.п.

Ряд этапов математической обработки, например, отбраковка ошибочных результатов, аппроксимация и т.п., выполняется по единым алгоритмам,независимо от темы исследования.

Другие этапы требуют разработки специальных алгоритмов,пригодных только для данного конкретного исследования. Например, переработка исходной информации в целях получения искомых величин.

При обработке результатов измерений возникает необходимость в использовании табличных данных, результатов исследования, полученных ранее, а также другой справочной информации. Полученные результаты исследования представляют научную ценность. Поэтому они обычно регистрируются и накапливаются в целях последующего использования. В этой связи возникает необходимость в создании специального информационного обеспечения системы автоматизации экспериментальных исследований.

Под программным обеспечением системы автоматизации экспериментальных исследований понимают совокупность программ, обеспечивающих эффективное выполнение возложенных на систему функций. В программном обеспечении системы автоматизации экспериментальных исследований можно выделить две части:

операционную систему (ОС);

программы прикладного математического обеспечения.

Операционная система управляет выполнением машинных программ,вводом-выводом данных, обеспечивает трансляцию программ, т.е. обеспечивает перевод программ, написанных на алгоритмических языках, на машинный язык соответствующей ЭВМ и их отладку, распределяет память и другие ресурсы и т.п. В зависимости от типа и класса используемой ЭВМ операционная система обеспечивает реализацию различных режимов ее работы, отличающихся формой организации вычислительного процесса, способом обмена информацией между объектом исследования и ЭВМ,принципом организации взаимодействия между ЭВМ и исследователем.

По способу обмена информацией выделяют:

- режим машинного времени, при котором сбор измерительной информации и ее ввод в ЭВМ в целях обработки разнесены во времени;
- режим реального времени, когда ввод измерительной информации в ЭВМ и ее обработка осуществляются одновременно с ходом исследуемого явления или процесса. При этом появляется возможность использования результатов вычислений для оперативного воздействия на объект исследования, а также контроля за правильностью функционирования экспериментальной установки.

По принципам организации взаимодействия исследователя и ЭВМ различают директивный и диалоговый режимы. В директивном режиме исследователь после запуска программы не имеет возможности вмешиваться в ход ее выполнения, а диалоговый режим дает возможность такого вмешательства с внесением необходимых изменений в этот ход на основе анализа промежуточных результатов.

Предписанный режим работы ЭВМ обеспечивается программой управления, называемой супервизором и являющейся центральной частью операционной системы. Супервизор осуществляет упорядоченный вызов различных модулей операционной системы, обеспечивающих ввод программ и исходных данных,трансляцию, редактирование, загрузку программ в оперативное запоминающее устройство, вывод результатов и т.п.

Операционная система сама по себе не обеспечивает еще выполнение возложенной на конкретную систему автоматизации экспериментальных исследований задачи, а служит лишь средством повышения эффективности функционирования этой системы.

Для выполнения системой своего назначения она должна быть снабжена набором специальных программ, составляющих вторую часть программного обеспечения - программы прикладного математического обеспечения (ПМО).

Состав программ ПМО определяется поставленной целью и задачами исследования. В программах ПМО реализуются методики и алгоритмы математического обеспечения системы автоматизации экспериментальных исследований.

К программам ПМО предъявляется ряд требований, основными из которых являются удобство использования, оптимальные эксплуатационные характеристики, касающиеся, прежде всего, высокого быстродействия и минимизации потребного объема памяти, возможность использования для других типов ЭВМ и в других системах автоматизации экспериментальных исследований.

Программы ПМО могут быть выполнены в виде библиотеки модулей,а также в форме пакета прикладных программ. В этих случаях составными частями ПМО являются программные модули, каждый из которых предназначен для решения отдельной функциональной задачи. Общая программа обработки информации автоматически составляется из модулей специальной управляющей программой. Управляющая программа составляется пользователем для каждой конкретной задачи. Отличительной особенностью ПМО в форме пакета прикладных программ является то,что составление управляющей программы здесь максимально упрощено в результате использования специально разработанного проблемно-ориентированного языка, близкого к обычному профессиональному языку специалиста соответствующей области. Эти две формы представления программ ПМО обладают большой гибкостью и широко используются в системах автоматизации экспериментальных исследований.

Вопросы для самоконтроля

1. В каком соотношении находятся понятия «цель моделирования» и «адекватность модели»?
2. В чем заключается достоинство имитационного моделирования как метода исследования сложных систем?
3. В чем отличие аналитических и имитационных моделей?
4. Что называется статической и динамической моделями объекта?
5. Что называется точностью и достоверностью результатов моделирования на ЭВМ

Литература

а) основная литература

1. **Васильков Ю.В.** Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировани: учебник для вузов / Ю.В. Васильков, Н. Н Василькова. – М. :Финансы и статистика, 2008. – 432 с.

б) дополнительная литература

1. **Попов В.Б.** Основы компьютерных технологий: : учебник для вузов / В.Б. Попов. - М.: Финансы и статистика, 2007. – 703с.
2. **Карпова. Т.С**. Базы данных: модели, разработка, реализация / Т.С. Карпова. - СПб.: Питер, 2011. 221 с.

http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/numerics.htm
http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm

Раздел 6.
ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ.

(Нелинейные динамические модели в виде системы дифференциальных уравнений. Задача управления технологическим процессом.)

С середины XX в. в самых различных областях человеческой деятельности стали широко применять математические методы и ЭВМ. Возникли такие новые дисциплины, как «математическая экономика», «математическая химия», «математическая лингвистика» и т. д., изучающие математические модели соответствующих объектов и явлений, а также методы исследования этих моделей.

Математическая модель — это приближенное описание какого-либо класса явлений или объектов реального мира на языке математики. Основная цель моделирования — исследовать эти объекты и предсказать результаты будущих наблюдений. Однако моделирование — это еще и метод познания окружающего мира, дающий возможность управлять им.

Математическое моделирование и связанный с ним компьютерный эксперимент незаменимы в тех случаях, когда натурный эксперимент невозможен или затруднен по тем или иным причинам. Например, нельзя поставить натурный эксперимент в истории, чтобы проверить, «что было бы, если бы...» Невозможно проверить правильность той или иной космологической теории. В принципе возможно, но вряд ли разумно, поставить эксперимент по распространению какой-либо болезни, например чумы, или осуществить ядерный взрыв, чтобы изучить его последствия. Однако все это вполне можно сделать на компьютере, построив предварительно математические модели изучаемых явлений.

Основные этапы математического моделирования.

1) Построение модели. На этом этапе задается некоторый «нематематический» объект — явление природы, конструкция, экономический план, производственный процесс и т. д. При этом, как правило, четкое описание ситуации затруднено. Сначала выявляются основные особенности явления и связи между ними на качественном уровне. Затем найденные качественные зависимости формулируются на языке математики, то есть строится математическая модель. Это самая трудная стадия моделирования.

2) Решение математической задачи, к которой приводит модель. На этом этапе большое внимание уделяется разработке алгоритмов и численных методов решения задачи на ЭВМ, при помощи которых результат может быть найден с необходимой точностью и за допустимое время.

3) Интерпретация полученных следствий из математической модели. Следствия, выведенные из модели на языке математики, интерпретируются на языке, принятом в данной области.

4) Проверка адекватности модели. На этом этапе выясняется, согласуются ли результаты эксперимента с теоретическими следствиями из модели в пределах определенной точности.

5) Модификация модели. На этом этапе происходит либо усложнение модели, чтобы она была более адекватной действительности, либо ее упрощение ради достижения практически приемлемого решения.

Классифицировать модели можно по разным критериям. Например, по характеру решаемых проблем модели могут быть разделены на функциональные и структурные. В первом случае все величины, характеризующие явление или объект, выражаются количественно. При этом одни из них рассматриваются как независимые переменные, а другие — как функции от этих величин. Математическая модель обычно представляет собой систему уравнений разного типа (дифференциальных, алгебраических и т. д.), устанавливающих количественные зависимости между рассматриваемыми величинами. Во втором случае модель характеризует структуру сложного объекта, состоящего из отдельных частей, между которыми существуют определенные связи. Как правило, эти связи не поддаются количественному измерению. Для построения таких моделей удобно использовать теорию графов. Граф — это математический объект, представляющий собой некоторое множество точек (вершин) на плоскости или в пространстве, некоторые из которых соединены линиями (ребрами).

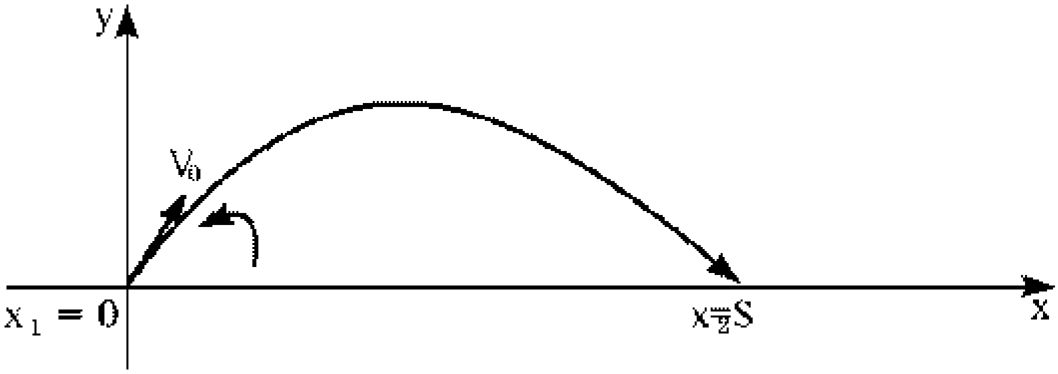
По характеру исходных данных и результатов предсказания модели могут быть разделены на детерминистические и вероятностно-статистические. Модели первого типа дают определенные, однозначные предсказания. Модели второго типа основаны на статистической информации, а предсказания, полученные с их помощью, имеют вероятностный характер.

1) Задачи о движении снаряда.

Рассмотрим следующую задачу механики.

Снаряд пущен с Земли с начальной скоростью v_0 = 30 м/с под углом □ = 45° к ее поверхности; требуется найти траекторию его движения и расстояние S между начальной и конечной точкой этой траектории.

Пренебрегая размерами снаряда, будем считать его материальной точкой. Введем систему координат xOy, совместив ее начало O с исходной точкой, из которой пущен снаряд, ось x направим горизонтально, а ось y — вертикально (рис. 1).



Тогда, как это известно из школьного курса физики, движение снаряда описывается формулами:

$$x = tv_0\cos\alpha, \quad y = tv_0\sin\alpha - \frac{gt^2}{2},$$

где t — время, g = 10 м/с^2 — ускорение свободного падения. Эти формулы и дают математическую модель поставленной задачи. Выражая t через x из первого уравнения и подставляя во второе, получим уравнение траектории движения снаряда:

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{x^2 g}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Эта кривая (парабола) пересекает ось x в двух точках: $x_1 = 0$ (начало траектории) и $x_2 = S = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ (место падения снаряда). Подставляя в полученные формулы заданные значения v0 и а, получим

ответ: $y = x - 90x^2$, S = 90 м.

Отметим, что при построении этой модели использован ряд предположений: например, считается, что Земля плоская, а воздух и вращение Земли не влияют на движение снаряда.

2) Задача о баке с наименьшей площадью поверхности.

Требуется найти высоту h_0 и радиус r_0 жестяного бака объема $V = 30$ м^3, имеющего форму закрытого кругового цилиндра, при которых площадь его поверхности S минимальна (в этом случае на его изготовление пойдет наименьшее количество жести).

Запишем следующие формулы для объема и площади поверхности цилиндра высоты h и радиуса r:

$V = \pi r^2 h$, $S = 2\pi r(r + h)$.

Выражая h через r и V из первой формулы и подставляя полученное выражение во вторую, получим:

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Таким образом, с математической точки зрения, задача сводится к определению такого значения r, при котором достигает своего минимума функция S(r). Найдем те значения r_0, при которых производная

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$$

обращается в ноль: $r_0 = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$. Можно проверить, что вторая производная функции S(r) меняет знак с минуса на плюс при переходе аргумента r через точку r_0. Следовательно, в точке r0 функция S(r) имеет минимум. Соответствующее значение $h_0 = 2r_0$. Подставляя в выражение для r_0 и h_0 заданное значение V, получим искомый радиус $r_0 = (4{,}78)^{\frac{1}{3}}$ и высоту $h_0 = 2 \cdot (4{,}78)^{\frac{1}{3}}$.

3) Транспортная задача.

В городе имеются два склада муки и два хлебозавода. Ежедневно с первого склада вывозят 50 т муки, а со второго — 70 т на заводы, причем на первый — 40 т, а на второй — 80 т.

Обозначим через a_{ij} стоимость перевозки 1 т муки с i-го склада на j-й завод (i, j = 1,2). Пусть

$a_{11} = 1{,}2$ р., $a_{12} = 1{,}6$ р., $a_{21} = 0{,}8$ р., $a_{22} = 1$ р.

Как нужно спланировать перевозки, чтобы их стоимость была минимальной?

Придадим задаче математическую формулировку. Обозначим через x_1 и x_2 количество муки, которое надо перевезти с первого склада на первый и второй заводы, а через x_3 и x_4 — со второго склада на первый и второй заводы соответственно. Тогда:

$x_1 + x_2 = 50$, $x_3 + x_4 = 70$, $x_1 + x_3 = 40$, $x_2 + x_4 = 80$. (1)

Общая стоимость всех перевозок определяется формулой

$f = 1{,}2x_1 + 1{,}6x_2 + 0{,}8x_3 + x_4$.

С математической точки зрения, задача заключается в том, чтобы найти четыре числа x_1, x_2, x_3 и x_4, удовлетворяющие всем заданным условиям и дающим минимум функции f. Решим систему уравнений (1) относительно xi (i = 1, 2, 3, 4) методом исключения неизвестных. Получим, что

$x_1 = x_4 – 30$, $x_2 = 80 – x_4$, $x_3 = 70 – x_4$, (2)

а x_4 не может быть определено однозначно. Так как $x_i \geq 0$ (i = 1, 2, 3, 4), то из уравнений (2) следует, что $30 \leq x_4 \leq 70$. Подставляя выражение для x_1, x_2, x_3 в формулу для f, получим

$f = 148 - 0{,}2x_4$.

Легко видеть, что минимум этой функции достигается при максимально возможном значении x_4, то есть при $x_4 = 70$. Соответствующие значения других неизвестных определяются по формулам (2): $x_1 = 40$, $x_2 = 10$, $x_3 = 0$.

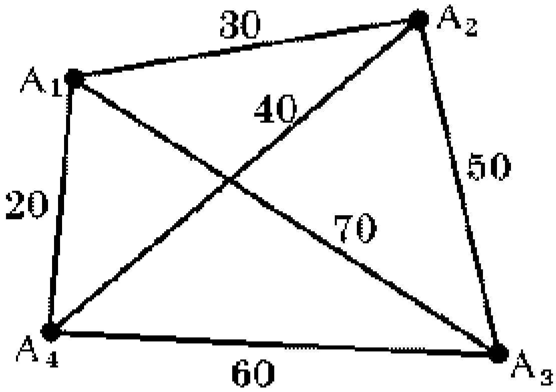
4) Задача о радиоактивном распаде.

Пусть N(0) — исходное количество атомов радиоактивного вещества, а N(t) — количество нераспавшихся атомов в момент времени t. Экспериментально установлено, что скорость изменения количества этих атомов N'(t) пропорциональна N(t), то есть $N'(t)=-\lambda N(t)$, $\lambda>0$ — константа радиоактивности данного вещества. В школьном курсе математического анализа показано, что решение этого дифференциального уравнения имеет вид $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$. Время T, за которое число исходных атомов уменьшилось вдвое, называется периодом полураспада, и является важной характеристикой радиоактивности вещества. Для определения T надо положить в формуле $\frac{N(t)}{N(0)} = 0{,}5.$ Тогда $T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}.$ Например, для радона $\lambda = 2{,}084 \cdot 10^{-6}$, и следовательно, T = 3,15 сут.

5) Задача о коммивояжере.

Коммивояжеру, живущему в городе A_1, надо посетить города A_2, A_3 и A_4, причем каждый город точно один раз, и затем вернуться обратно в A_1. Известно, что все города попарно соединены между собой дорогами, причем длины дорог b_{ij} между городами A_i и A_j (i, j = 1, 2, 3, 4) таковы:

$b_{12} = 30$, $b_{14} = 20$, $b_{23} = 50$, $b_{24} = 40$, $b_{13} = 70$, $b_{34} = 60$.



Надо определить порядок посещения городов, при котором длина соответствующего пути минимальна.

Изобразим каждый город точкой на плоскости и пометим ее соответствующей меткой Ai (i = 1, 2, 3, 4). Соединим эти точки отрезками прямых: они будут изображать дороги между городами. Для каждой «дороги» укажем ее протяженность в километрах (рис. 2). Получился граф — математический объект, состоящий из некоторого множества точек на плоскости (называемых вершинами) и некоторого множества линий, соединяющих эти точки (называемых ребрами). Более того, этот граф меченый, так как его вершинам и ребрам приписаны некоторые метки — числа (ребрам) или символы (вершинам). Циклом на графе называется последовательность вершин $V_1, V_2, ..., V_k, V_1$ такая, что вершины $V_1, ..., V_k$ — различны, а любая пара вершин V_i, V_{i+1} (i = 1, ..., k – 1) и пара V_1, V_k соединены ребром. Таким образом, рассматриваемая задача заключается в отыскании такого цикла на графе, проходящего через все четыре вершины, для которого сумма всех весов ребер минимальна. Найдем перебором все различные циклы, проходящие через четыре вершины и начинающиеся в A_1:

1) A_1, A_4, A_3, A_2, A_1; 2) A_1, A_3, A_2, A_4, A_1; 3) A_1, A_3, A_4, A_2, A_1.

Найдем теперь длины этих циклов (в км): $L_1 = 160$, $L_2 = 180$, $L_3 = 200$. Итак, маршрут наименьшей длины — это первый.

Заметим, что если в графе n вершин и все вершины попарно соединены между собой ребрами (такой граф называется полным), то число циклов, проходящих через все вершины, равно $\frac{(n-1)!}{2}$. Следовательно, в нашем случае имеется ровно три цикла.

6) Задача об определении надежности электрической цепи.

Здесь мы рассмотрим пример вероятностной модели. Сначала приведем некоторые сведения из теории вероятностей — математической дисциплины, изучающей закономерности случайных явлений, наблюдаемых при многократном повторении опыта. Назовем случайным событием А возможный исход некоторого опыта. События A_1, ..., A_k образуют полную группу, если в результате опыта обязательно происходит одно из них. События называются несовместными, если они не могут произойти одновременно в одном опыте. Пусть при n-кратном повторении опыта событие А произошло m раз. Частотой события А называется число W = . Очевидно, что значение W нельзя предсказать точно до проведения серии из n опытов. Однако природа случайных событий такова, что на практике иногда наблюдается следующий эффект: при увеличении числа опытов значение $W = \frac{m}{n}$. практически перестает быть случайным и стабилизируется около некоторого неслучайного числа P(A), называемого вероятностью события А. Для невозможного события (которое никогда не происходит в опыте) P(A)=0, а для достоверного события (которое всегда происходит в опыте) P(A)=1. Если события A_1, ..., A_k образуют полную группу несовместимых событий, то $P(A_1)+...+P(A_k)=1$.

Пусть, например, опыт состоит в подбрасывании игральной кости и наблюдении числа выпавших очков X. Тогда можно ввести следующие случайные события $A_i = \{X = i\}$, i = 1, ..., 6. Они образуют полную группу несовместных равновероятных событий, поэтому $P(A_i)$ = (i = 1, ..., 6).

Суммой событий А и В называется событие А + В, состоящее в том, что в опыте происходит хотя бы одно из них. Произведением событий А и В называется событие АВ, состоящее в одновременном появлении этих событий. Для независимых событий А и В верны формулы

P(AB) = P(A)•P(B), P(A + B) = P(A) + P(B).

8) Рассмотрим теперь следующую **задачу**. Предположим, что в электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо друг от друга. Вероятности отказов 1-го, 2-го и 3-го элементов соответственно равны $P_1 = 0{,}1$, $P_2 = 0{,}15$, $P_3 = 0{,}2$. Будем считать цепь надежной, если вероятность того, что в цепи не будет тока, не более 0,4. Требуется определить, является ли данная цепь надежной.

Так как элементы включены последовательно, то тока в цепи не будет (событие А), если откажет хотя бы один из элементов. Пусть A_i — событие, заключающееся в том, что i-й элемент работает (i = 1, 2, 3). Тогда P(A1) = 0,9, P(A2) = 0,85, P(A3) = 0,8. Очевидно, что $A_1A_2A_3$ — событие, заключающееся в том, что одновременно работают все три элемента, и

$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)•P(A_2)•P(A_3) = 0{,}612$.

Тогда $P(A) + P(A_1A_2A_3) = 1$, поэтому $P(A) = 0{,}388 < 0{,}4$. Следовательно, цепь является надежной.

В заключение отметим, что приведенные примеры математических моделей (среди которых есть функциональные и структурные, детерминистические и вероятностные) носят иллюстративный характер и, очевидно, не исчерпывают всего разнообразия математических моделей, возникающих в естественных и гуманитарных науках.

.

Вопросы для самоконтроля

1. На каком этапе проводится Решение математической задачи, к которой приводит модель?
2. В чем заключается этап Построение модели?
3. На каком этапе следствия, выведенные из модели на языке математики, интерпретируются на языке, принятом в данной области?
4. Когда применяется модификация модели.

Литература

а) основная литература

1. **Васильков Ю.В.** Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировани: учебник для вузов / Ю.В. Васильков, Н. Н Василькова. – М. :Финансы и статистика, 2008. – 432 с.

б) дополнительная литература

1. **Попов В.Б.** Основы компьютерных технологий: : учебник для вузов / В.Б. Попов. - М.: Финансы и статистика, 2007. – 703с.
2. **Карпова. Т.С**. Базы данных: модели, разработка, реализация / Т.С. Карпова. - СПб.: Питер, 2011. 221 с.

http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/numerics.htm
http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/pde.htm

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1. Модели и моделирование. 2

Раздел 2 классификация моделей. Основные понятия и определения. 5

Раздел 3. Типовые математические схемы моделирования. 9

Виды моделей 9

Классификация математических моделей. 9

Математические модели с сосредоточенными параметрами. 9

Математические модели с распределенными параметрами. 9

Математические модели, основанные на экстремальных принципах. 10

Жизненный цикл моделируемой системы 15

Раздел 4. Эксперименты с моделями. 17

Основные операции при работе с моделями 17

Создание модели 17

Раздел 5. Модели непрерывных систем. 19

Раздел 6. Основные принципы математического моделирования

механических систем и процессов. 24