

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Саратовский государственный аграрный университет
имени Н.И. Вавилова»**

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Краткий курс лекций

для студентов 2 и 3 курса

Направление подготовки

20.05.01 Пожарная безопасность

Саратов 2016

Введение

Дисциплина «Сопротивление материалов» относится к числу естественно научных дисциплин. Она изучает основные виды сопротивлений (простые и сложные), учит студентов проводить прочностные расчеты при всех видах нагрузений, дает возможность подбирать необходимые размеры поперечных сечений конструкций и деталей.

Знания по сопротивлению материалов являются базовыми для изучения дисциплин «Теоретическая механика», «Детали машин», «Материаловедение и технология материалов», «Здания, сооружения и их устойчивость при пожаре» и необходимы для выполнения курсовых и дипломных проектов.

Сопротивление материалов является дисциплиной связанной с производственной деятельностью. Качество знаний по дисциплине позволяет выполнять прочностные расчеты реальных конструкций и машин на высоком профессиональном уровне.

Лекция 1

Основные понятия и определения. Метод сечений. Напряжения, деформации.

1.1. Наука о сопротивлении материалов.

Сопротивление материалов – наука о прочности, жесткости и устойчивости элементов конструкций и сооружений.

Прочность – способность конструкции и ее элементов сопротивляться разрушению под действием внешних нагрузок.

Жесткость – способность конструкции и ее элементов сопротивляться нагрузкам в их стремлении изменить форму и размеры тела.

Устойчивость – способность конструкции и ее элементов сохранять форму упругого равновесия под действием внешних нагрузок.

Основные положения сопротивления материалов опираются на общие законы и теоремы теоретической механики. Однако если теоретическая механика рассматривает абсолютно твердые тела, то в сопротивлении материалов равновесие и движение тел рассматриваются с учетом их деформации.

Сопротивление материалов является наукой экспериментально-теоретической, так как широко использует опытные данные и теоретические исследования.

1.2. Основные гипотезы сопротивления материалов.

Для построения теории сопротивления материалов принимают гипотезы относительно структуры и свойств материалов, а также о характере деформации:

1. *Гипотеза сплошности* - предполагает, что материал полностью заполняет форму тела.

2. *Гипотеза однородности и изотропности* - материал считается однородными изотропным, т.е. в любом направлении свойства материала считаются одинаковыми.

3. *Гипотеза идеальной упругости* – материал конструкции обладает свойством идеальной упругости, т.е. способностью полностью восстанавливать первоначальную форму и размеры после снятия нагрузки.

4. *Принцип малости деформаций* - предполагается, что деформации малы в сравнении с размерами тела. Это позволяет в теории сопротивления материалов использовать все законы теоретической механики.

5. *Принцип независимости действия сил* – результат воздействия нескольких сил равен сумме результатов воздействия каждой силы, прикладываемой в отдельности и не зависит от последовательности их приложения.

1.3. Изучаемые объекты и классификация нагрузок.

При всем разнообразии видов элементов конструкций, встречающихся в сооружениях и машинах, их можно свести к сравнительно небольшому числу основных форм. Тела, имеющие эти основные формы, являются объектами расчета на прочность, жесткость и устойчивость. К ним относятся стержни, оболочки, пластины и массивные тела.

Стержень, брус – тело, один размер которого (длина) значительно больше его размеров поперечного сечения (рис. 1.1).

Геометрическая ось стержня – геометрическое место центров тяжести поперечных сечений.

Поперечное сечение – плоская фигура, нормальная к геометрической оси.

В зависимости от формы геометрической оси различают прямые (рис. 1.1,а) и кривые (рис. 1.1,б) стержни. Кроме того, стержни могут быть постоянного сечения (рис. 1.1, а) и переменного (рис. 1.1,в, г). Стержни, у которых толщина стенки значительно меньше габаритных размеров, называются тонкостенными (рис. 1.1. д).

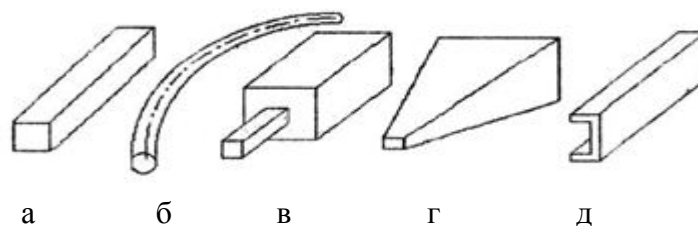


Рис. 1.1. Стержни: а – прямой; б – кривой; в, г – переменного сечения; д - тонкостенный

Пластинка – тело, ограниченное двумя плоскими поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с прочими размерами.

Оболочка – тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с прочими размерами.

Массив – тело, у которого все три размера одного порядка.

Классификация нагрузок

Силы – мера воздействия тел друг на друга. В сопротивлении материалов следует различать внешние и внутренние силы (нагрузки). Внешние силы – это силы, приложенные к телу со стороны других тел или окружающей среды. Они классифицируются по следующим признакам.

1. По способу приложения: а) сосредоточенные силы F , приложенные к малой площадке, практически в точке, размерность – Н, кН, МН; б) распределенные силы q , действующие на часть или на всю поверхность тела. Нагрузка, приходящаяся на единицу длины Н/м или на единицу площади Н/м², называется интенсивностью нагрузки; в) объемные силы, действующие на каждую частицу тела (силы тяжести, инерции), размерность – Н/м³.

2. По характеру воздействия: а) статические – не меняющиеся со временем или меняющиеся настолько медленно, что вызываемые ими ускорения и силы инерции элементов конструкции пренебрежимо малы; б) динамические – меняющие свое значение, положение и направление в короткие промежутки времени; вызывают большие ускорения и силы инерции; в) повторно - переменные – многократно изменяющие со временем значение или значение и знак.

3. По продолжительности действия: а) постоянные – нагрузки, действующие в течение всего времени существования конструкции или сооружения; б) временные – нагрузки, действующие на протяжении отдельных периодов эксплуатации.

К внешним силам также относятся реакции связей. В сопротивлении материалов изучают только те дополнительные внутренние силы, которые появляются в результате нагружения тела. Внутренние силы часто называются усилиями.

1.4. Метод сечений

Рассмотрим стержень, на который действует система взаимно уравновешенных внешних сил $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ (рис. 1.4) и определим внутренние усилия в произвольно выбранном сечении.

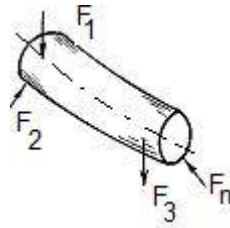


Рис. 1.4. Стержень с приложенными к нему силами

В исследуемом сечении мысленно разрежем стержень некоторой плоскостью на две части I и II (рис. 1.5, а) и рассмотрим равновесие одной из них, например, левой (рис. 1.5,б). Кроме внешних сил F_1 и F_2 в каждой точке поперечного сечения

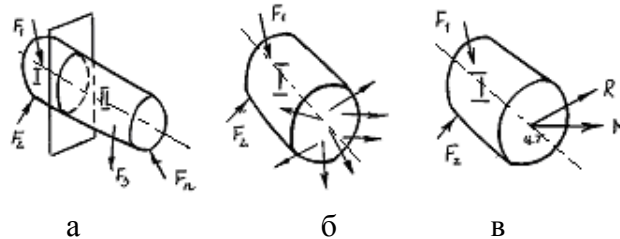


Рис. 1.5. Метод сечений

будут действовать внутренние усилия, заменяющие действие отброшенной части II, уравновешивая рассматриваемую часть I. Внутренние усилия можно привести к одной точке-центру приведения (обычно к центру тяжести сечения). В результате в поперечном сечении получим главный вектор R и главный момент M (рис.1.5 в), каждый из которых можно представить в виде трех составляющих по выбранным координатным осям x, y, z . Направляя ось z по нормали к сечению и рассматривая оси x и y в его плоскости (рис. 1.6), получаем шесть составляющих – шесть внутренних силовых факторов, где N – продольная (нормальная) сила; Q_x и Q_y – поперечные силы; M_z ($M_{кр}$) – крутящий момент; M_x и M_y – изгибающие моменты относительно x и y .

Для определения внутренних усилий имеется шесть уравнений статики:

$$\begin{aligned} \sum x = 0; \quad \sum y = 0; \quad \sum z = 0; \\ \sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0; \end{aligned} \quad (1.1)$$

Рис.1.6. Внутренние усилия в сечениях стержня.

1.5. Напряжения и деформации

Выделим вокруг произвольной точки K (рис. 1.7, а) поперечного сечения оставленной части стержня бесконечно малый элемент площади dA . На этой площадке возникает внутренняя сила dR , ($dM = 0$ в силу малости элемента). В пределе при стремлении dA к нулю получим полное напряжение в данной точке рассматриваемого сечения, равное:

$$S = \lim_{dA \rightarrow 0} dR / dA$$

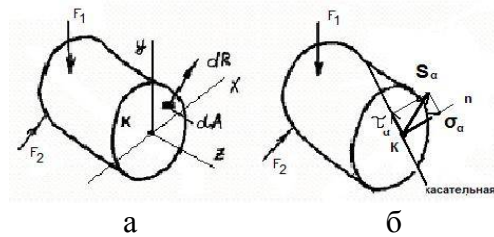


Рис. 1.7. К определению напряжений в произвольной точке сечения

Разложим вектор полного напряжения S на две составляющие: нормальную и касательную к площадке и получим нормальное σ и касательное τ напряжения в точке K исследуемого сечения.

Размерность – $\text{Н/м}^2 = \text{Па}$; $\text{МН/м}^2 = \text{МПа}$.

Таким образом, *напряжение* – это интенсивность внутренних усилий (т.е. внутренние усилия, приходящиеся на единицу площади).

Как элементы конструкции, так и конструкция в целом при действии внешних сил изменяют свои размеры и форму. Это изменение носит общее название – деформация.

Деформация – это способность тел изменять свою форму и размеры под действием внешних сил.

В сопротивлении материалов различают упругие и пластические деформации:

- упругие – исчезающие после снятия нагрузки;
- пластические (остаточные)- не исчезающие после снятия нагрузки.

Вопросы для самоконтроля.

- 1.Какие вопросы изучает дисциплина сопротивления материалов.
- 2.Что называется брусом, оболочкой, пластинкой, массивом.
- 3.Классификация нагрузок.
- 4.Каким методом определяются внутренние усилия.
- 5.Основные гипотезы и допущения сопротивления материалов.
- 6.Дать определение напряжений.

Список литературы

Основная

1. Волков А.Н. ,Сопротивление материалов (учебник), М.: КолосС, 2004. - 286 с.
- 2.Александров А.В., Сопротивление материалов (учебник), М.: В. Ш., 2008. - 560с.
- 3.Н.А.Костенко, С. В. Балясникова, Ю. Э. Волошановская , Сопротивление материалов (учебное пособие), М.: В. Ш., 2007. - 488с.
- 4.Ахметзянов М.Х., Сопротивление материалов (учебник), М.: В. Ш., 2007. - 334с.
- 5.Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н.Сопротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2007. - 416с.
- 6.Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н.Сопротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2010. - 430с.
- 7.Г.Д.Межецкий, Г.Г.Загребин, Н.Н.Решетник, А.А. Слепов. Сопротивление материалов (учебное пособие). Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2004. - 416 с.

Лекция 2

Осевое растяжение (сжатие) Внутренние усилия, напряжения, деформации, расчет на прочность.

2.1 Понятие осевого растяжения (сжатия). Внутренние усилия

Осевым (центральным) растяжением - сжатием называется такой вид деформации, при котором внешние нагрузки действуют вдоль оси бруса (рис. 2.1).

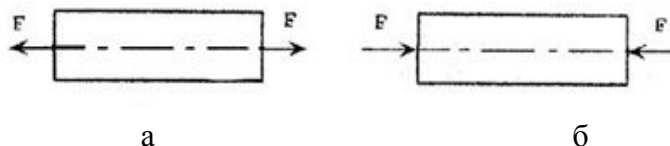


Рис. 2.1. Осевое растяжение (а) и сжатие (б)

Внутренние усилия

Внутренние усилия в любом сечении стержня определяются методом сечений. Для этого необходимо на каждом силовом участке провести сечение, перпендикулярное оси стержня. Границами силового участка могут быть точки приложения внешних нагрузок, изменения сечения стержня или изменения материала стержня. Затем мысленно отбросить одну из частей стержня, а ее действие заменить одним из внутренних силовых факторов, в данном случае – продольной силой N . Затем для оставшейся части составить одно уравнение статики ($\sum z = 0$, если стержень горизонтальный, и $\sum y = 0$, если стержень вертикальный) и определить значение продольной силы N .

Правило знаков для продольной силы

Продольная сила считается положительной ($N > 0$), если она вызывает растяжение, т.е. ее вектор направлен от сечения, и отрицательной ($N < 0$), если она вызывает сжатие, т.е. ее вектор направлен к сечению.

Если направление продольной силы неизвестно, то ее условно всегда принимают положительной, полагая, что брус растянут. При решении уравнения статики знак «минус» указывает на ошибочность предварительно выбранного направления.

Рассмотрим стержень, показанный на рис. 2.2, и определим внутренние усилия на его силовых участках.

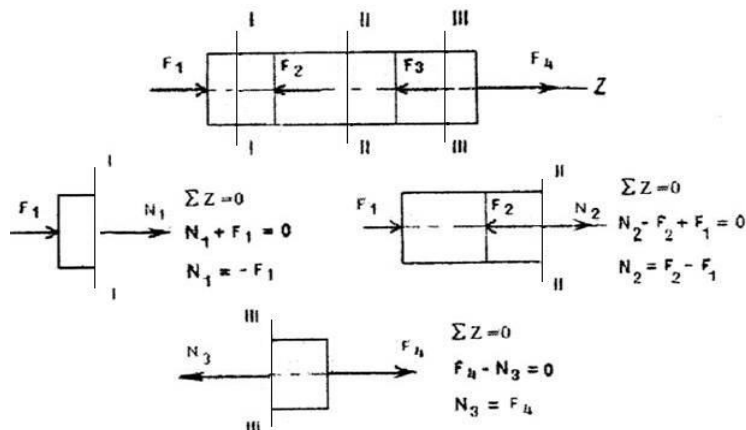


Рис. 2.2. Схема нагружения стержня.

Анализируя выражения усилий N_1 , N_2 и N_3 , можно отметить, что продольная сила в поперечном сечении стержня численно равна алгебраической сумме проекций на его ось всех внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения.

. В тех случаях, когда значения продольной силы в различных сечениях стержня неодинаковы, то наглядное представление о законе ее изменения по длине стержня дает график (эпюра продольных сил).

Эпюра – это график изменения внутреннего усилия вдоль оси бруса.

Ось (база), на которой строится эпюра, называется базисной линией. Она совпадает с осью бруса либо параллельна ей. От базисной линии по перпендикуляру под каждым сечением бруса откладываются ординаты, которые в выбранном масштабе изображают величину внутреннего силового фактора в данном сечении. На эпюрах проставляют числа, показывающие величины характерных ординат, а в поле эпюры в кружочке ставят знак усилия.

Контроль эпюры продольных сил N .

В сечениях стержня, где приложены внешние сосредоточенные силы, на эпюре N должны быть скачки, равные по модулю величине силы в этом сечении.

2.2. Нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса при растяжении (сжатии).

При осевом растяжении – сжатии в зависимости от действующих нагрузок в каждой точке поперечного сечения возникают нормальные напряжения σ , которые определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (2.1.)$$

где: N – продольная сила в поперечном сечении;

A – площадь поперечного сечения.

Знак нормальных напряжений – такой же, как и для продольной силы: при растяжении – «плюс», при сжатии – «минус».

2.3. Деформации. Закон Гука при растяжении (сжатии).

Для того чтобы иметь полную картину работы растянутого или сжатого элемента, необходимо знать как будут меняться его размеры. Эксперименты показывают, что при растяжении длина стержня увеличивается, а поперечные размеры уменьшаются (рис. 2.3); при сжатии – наоборот.

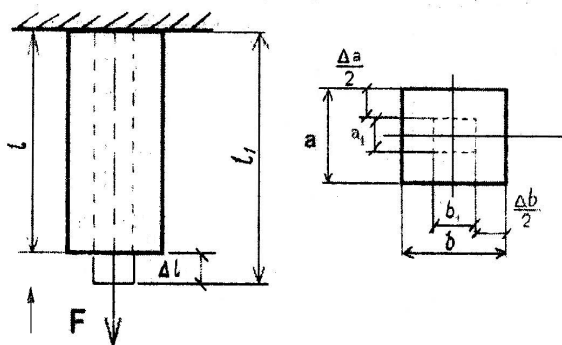


Рис. 2.3. Деформации при осевом растяжении

Осевое растяжение (сжатие) характеризуется следующими деформациями:

- абсолютная продольная деформация Δl :

$$\Delta l = l_1 - l; \quad (2.2)$$

- абсолютная поперечная деформация Δa и Δb :

$$\Delta a = a - a_1; \Delta b = b - b_1; \quad (2.3)$$

- относительная продольная деформация ε :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (2.4)$$

- относительная поперечная деформация ε' :

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a}; \varepsilon' = \frac{\Delta b}{b} \quad (2.5)$$

Английский ученый Роберт Гук экспериментально установил зависимость (до определенных пределов нагружения)

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \text{ - закон Гука} \quad (2.6.)$$

где: N – внутреннее усилие, (продольная сила)

E – модуль продольной упругости материала (модуль Юнга); имеет размерность напряжения и характеризует механические свойства материала.

(для стали $E_{ст} = 2 \cdot 10^5$ МПа).

EA — жесткость стержня при растяжении (сжатии).

В современной трактовке закон Гука определяет линейную зависимость между напряжением и деформацией (в пределах упругих деформаций).

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.7)$$

Нормальные напряжения при растяжении (сжатии) прямо пропорциональны относительной продольной деформации.

Между поперечной и продольной деформациями в пределах применимости закона Гука существует постоянное отношение. Абсолютная величина этого отношения называется коэффициентом Пуассона или коэффициентом поперечной деформации ν , характеризующим упругие свойства материала:

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| \quad (2.8)$$

Коэффициент Пуассона ν – величина безразмерная, изменяется в пределах $0 < \nu < 0,5$; $\nu = 0$ – пробка; $\nu = 0,5$ – каучук; $\nu = 0,3$ – сталь.

Учитывая, что продольная и поперечная деформации всегда имеют противоположные знаки, связь продольной и поперечной деформаций выглядит следующим образом: $\varepsilon' = -\nu\varepsilon$

т.е. относительная поперечная деформация прямо пропорциональна относительной продольной деформации.

2.4. Расчет на прочность.

Для нормальной работы бруса или системы брусьев (стержней) необходимо выполнение условия прочности:

$$|\sigma_{\max}| = \frac{N}{A} \leq \sigma_{adm} \quad (2.9.)$$

где: σ_{adm} - допускаемое напряжение, это напряжение, которое обеспечивает безопасную работу конструкции. σ_{adm} зависит от материала стержня и определяется по формуле:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{lim}}{K} \quad (2.10.)$$

где: σ_{lim} - предельное (опасное) для материала напряжение,
 K – коэффициент запаса прочности.

Если площадь сечения A постоянна, то в формуле (2.9.) нужно брать N_{\max}

Для пластичных материалов опасным напряжением является предел текучести - σ_y ,

для хрупких материалов – предел прочности σ_u .

Все расчеты, вытекающие из условия прочности, называются расчетами по допускаемым напряжениям.

Вопросы для самопроверки.

1. Дать определение осевого растяжения-сжатия.
2. Внутренние усилия в сечениях бруса при растяжении-сжатии.
3. Напряжения в поперечных сечениях бруса.
4. Деформации при осевом растяжении-сжатии.
5. Закон Гука при растяжении-сжатии.
6. Условие прочности при растяжении-сжатии.

Список литературы

Основная

1. Волков А.Н., Сопrotивление материалов (учебник), М.: КолосС, 2004. - 286 с.
2. Александров А.В., Сопrotивление материалов (учебник), М.: В.Ш., 2008. - 560с.
3. Н.А.Костенко, С. В. Балясникова, Ю. Э. Волошановская, Сопrotивление материалов (учебное пособие), М.: В. Ш., 2007. - 488с.
4. Ахметзянов М.Х., Сопrotивление материалов (учебник), М.: В. Ш., 2007. - 334с.
5. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н. Сопrotивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2007. - 416с.
6. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н. Сопrotивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2010. - 430с.
7. Г.Д.Межецкий, Г.Г.Загребин, Н.Н.Решетник, А.А. Слепов. Сопrotивление материалов (учебное пособие). Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2004. - 416 с.

Дополнительная

1. Межецкий Г.Д. и др. Курс лекций по сопротивлению материалов, ч. 1, Саратов, СГАУ, 2001.
2. Степин А.А. Сопrotивление материалов. М: В. Ш., 1983.

Лекция 3

Механические испытания материалов.

3.1. Диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали.

Механическими испытаниями называется экспериментальное исследование механических свойств материалов на специальных образцах, форма и размеры которых устанавливаются ГОСТ.

Для того чтобы результаты испытания одного и того же материала были сравнимы, образцы должны иметь стандартные форму и размеры. Чаще всего образцы делают цилиндрическими (рис. 3.1, а), а для изучения механических свойств листовых материалов испытывают и плоские образцы прямоугольного поперечного сечения (рис. 3.1, б).

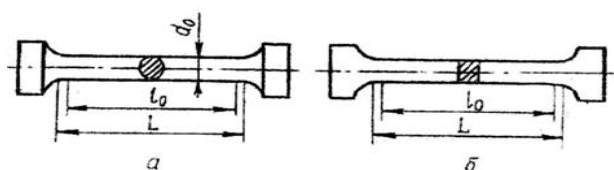


Рис. 3.1. Стандартные образцы для испытаний:
а - цилиндрический; б - плоский

У цилиндрического образца головки служат для захвата зажимами испытательной машины, конические участки необходимы для плавного перехода от утолщенных головок к цилиндрической рабочей части диаметром d_0 , длиной l_0 . Отношение длины рабочей части к диаметру установлено: $l_0/d_0 = 10$ -десятикратные и $l_0/d_0 = 5$ -пятикратные образцы.

Испытания на растяжение проводят на специальных разрывных или универсальных машинах. Растягивающее усилие прикладывается статически. Результаты испытаний нагляднее всего можно представить в виде диаграммы растяжения.

Диаграммой растяжения называется график зависимости между нагрузкой F и удлинением образца Δl .

Диаграмма растяжения машиной вычерчивается автоматически. Диаграмма для малоуглеродистой стали (углерода не более 0,22%) представлена на рис. 3.2.

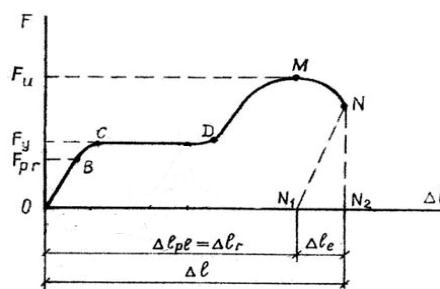


Рис. 3.2. Диаграмма растяжения образца

Характерные участки диаграммы

Участок OB – участок пропорциональности (прямолинейный участок диаграммы). На этом участке удлинения Δl растут прямо пропорционально увеличению нагрузки F т.е. справедлив закон Гука. Процесс удлинения на данном участке обратим, т.е. после снятия нагрузки образец полностью восстанавливает свои форму и размеры. Наибольшая нагрузка, до которой справедлив закон Гука, обозначается F_{pr} и называется нагрузкой пропорциональности.

Участок CD – площадка текучести (горизонтальный участок диаграммы). Удлинение образца растет при постоянном значении растягивающей силы, которую называют нагрузкой текучести и обозначают F_y . Такой процесс деформации называется текучестью материала и сопровождается остаточным (пластическим) удлинением.

Участок DM –участок упрочнения. На этом участке материал вновь приобретает способность увеличивать сопротивление дальнейшей деформации и воспринимает возрастающее до наибольшего (в т. М) усилие, которое обозначается F_u и называется разрушающей (предельной) нагрузкой.

Участок MN –участок образования шейки (зона местной текучести). После достижения усилия F_u при дальнейшем растяжении образца удлинения происходят, главным образом, на небольшом участке. Это ведет к образованию местного сужения в виде шейки (рис. 3.3) и к снижению силы F . Несмотря на это, напряжение в сечении шейки непрерывно растет.

Точка N диаграммы растяжения (рис. 3.2) соответствует моменту разрушения образца. Для определения полного удлинения образца из точки N опустим перпендикуляр на горизонтальную ось: отрезок $ON_2 = \Delta l$ – полное удлинение образца.

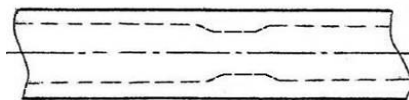


Рис. 3.3. Участок образца с образованием шейки

Затем из точки N проведем прямую, параллельную прямолинейному участку диаграммы (участку OB). Получим отрезки:

$$ON_1 = \Delta l_r \text{ – остаточное удлинение образца;}$$

$$N_1N_2 = \Delta l_e \text{ упругое удлинение образца.}$$

Тогда:
$$\Delta l = \Delta l_r + \Delta l_e$$

Диаграмма напряжений

Для того чтобы исключить влияние абсолютных размеров образца и судить о механических свойствах непосредственно материала, диаграмму растяжения перестраивают в других координатах: все ординаты делят на первоначальную площадь поперечного сечения образца A_0 , а все абсциссы – на первоначальную расчетную длину l_0 . В результате получается график зависимости между нормальным напряжением и деформацией (рис. 3.4) – диаграмма растяжения материала (σ - ϵ).

3.2. Механические характеристики материалов

1. *Предел пропорциональности* σ_{pr} – наибольшее напряжение, при котором справедлив закон Гука:

$$\sigma_{pr} = \frac{F_{pr}}{A_0} \quad (3.1)$$

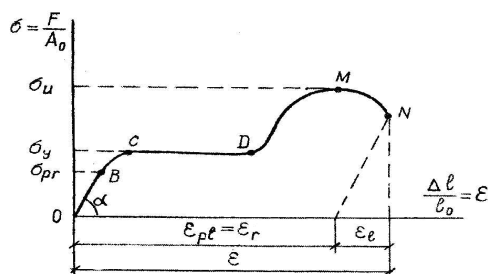


Рис. 3.4. Диаграмма напряжений.

2. *Предел текучести* σ_y – напряжение, при котором деформации растут при постоянной нагрузке::

$$\sigma_y = \frac{F_y}{A_0} \quad (3.2)$$

3. *Предел прочности* σ_u – наибольшее напряжение, которое выдерживает материал до своего разрушения:

$$\sigma_u = \frac{F_u}{A_0} \quad (3.3.)$$

Следует отметить, что диаграмму растяжений материала называют условной, т.к. напряжения и удлинения определяются соответственно по отношению к первоначальной площади сечения и первоначальной длине образца.

После проведения испытания определяют еще две характеристики, являющиеся мерой пластичности материала.

1. *Относительная остаточная продольная деформация* ε_r – отношение остаточного удлинения образца к его первоначальной длине (в процентах):

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta l_r}{l_0} \cdot 100\% = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100\% \quad (3.4)$$

2. *Относительное остаточное изменение площади образца* ψ_r – отношение изменения площади поперечного сечения образца в месте разрыва к первоначальной площади (в процентах):

$$\psi_r = \frac{\Delta A}{A_0} \cdot 100\% = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \cdot 100\% \quad (3.5)$$

где A_0 – площадь поперечного сечения образца до испытаний; A_1 – площадь поперечного сечения образца в месте разрыва.

3.3. Диаграмма напряжений пластичных материалов, не имеющих площадки текучести.

Ярко выраженная площадка текучести присуща только малоуглеродистым сталям, содержащим 0,1–0,3 % углерода, латуни и некоторым видам бронзы. Для большинства металлов и сплавов характерен постепенный переход в пластическую стадию (рис. 3.5).

Следует отметить, что и при отсутствии площадки текучести материал ведет себя как пластичный, т.е. разрушается после развития больших остаточных деформаций.

Отсутствие площадки текучести затрудняет определение предела текучести, поэтому вводят понятие условного предела текучести.

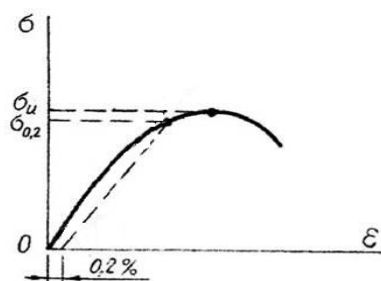


Рис. 3.5. Диаграмма напряжений пластичных материалов, не имеющих площадки текучести

Условным пределом текучести называется напряжение, при котором остаточная деформация достигает значения, установленного ГОСТ или ТУ.

Обычно принимают $\varepsilon_r = 0,2\%$ от величины относительной остаточной деформации, поэтому условный предел текучести обозначается $\sigma_{0,2}$.

Вопросы для самопроверки.

1. В каких координатах строится диаграмма растяжения.
2. Что называется пределом пропорциональности, пределом текучести, пределом прочности.
3. Что называется условным пределом текучести.
4. Характеристики прочности материала.
5. Характеристики пластичности

Список литературы

Основная

1. Волков А.Н. ,Сопrotивление материалов (учебник), М.: КолосС, 2004. - 286 с.
- 2.Александров А.В., Сопrotивление материалов (учебник), М.: В.Ш ., 2008. - 560с.
- 3.Н.А.Костенко, С. В. Балясникова, Ю. Э. Волошановская , Сопrotивление материалов (учебное пособие), М.: В. ., 2007. - 488с.
- 4.Ахметзянов М.Х., Сопrotивление материалов (учебник), М.: В.Ш., 2007. - 334с.
- 5.Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н.Сопrotивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2007. - 416с.
- 6.Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н.Сопrotивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2010. - 430с.
- 7.Г.Д.Межецкий, Г.Г.Загребин, Н.Н.Решетник, А.А. Слепов. Сопrotивление материалов (учебное пособие). Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2004. - 416 с.

Дополнительная

- 1.Межецкий Г.Д. и др. Растяжение- сжатие, метод. Руководство к лабораторным работам СГАУ, Саратов, 2003.

Лекция 4

Геометрические характеристики плоских сечений.

4.1. Понятие геометрических характеристик плоских сечений. Их свойства.

Сопротивление стержня различным видам деформации часто зависит не только от его материала и размеров, но формы поперечных сечений. В данной теме рассмотрим геометрические характеристики поперечных сечений, определяющие сопротивление различным видам деформаций.

Рассмотрим произвольную фигуру (поперечное сечение бруса) в координатных осях xOy (рис. 4.1) и укажем ее геометрические характеристики.

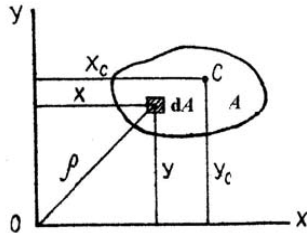


Рис. 4.1. Произвольное сечение бруса

Площадь является простейшей геометрической характеристикой поперечного сечения:

$$A = \int_A dA \quad (4.1)$$

Размерность площади – $мм^2$, $см^2$, $м^2$.

Статические моменты площади сечения

$$S_x = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A x dA \quad (4.2)$$

где: x, y – координаты центра тяжести выделенной элементарной площадки dA .

Размерность статического момента – $мм^3$, $см^3$, $м^3$.

В зависимости от знака координат (положения осей), статический момент может быть положительным, отрицательным и равным нулю.

Пусть x_c и y_c – координаты центра тяжести (ц.т.) всей фигуры (см. рис. 4.1) – постоянные величины. Тогда:

$$S_x = Ay_c; \quad S_y = Ax_c \quad (4.3)$$

Из формулы (4.3) следует, что статические моменты площади относительно осей, проходящих через центр тяжести сечения (центральных осей), равны нулю.

При известных статических моментах и площади сечения координаты центра тяжести определяются по формулам:

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A} \quad (4.4)$$

Осевые моменты инерции плоских фигур

Осевые моменты инерции сечения относительно осей x, y (I_x, I_y)

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA \quad (4.5)$$

Размерность осевого момента инерции – $мм^4$, $см^4$, $м^4$.

Полярный момент инерции сечения I_p

$$I_p = \int_A \rho^2 dA \quad (4.6.)$$

Размерность полярного момента инерции – $мм^4, см^4, м^4$.

Свойство полярного момента инерции.

Полярный момент инерции относительно точки пересечения двух взаимно перпендикулярных осей связан с соответствующими осевыми моментами инерции соотношением:

$$I_p = I_x + I_y \quad (4.7.)$$

справедливость которого вытекает из равенства:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad (4.8.)$$

Осевые и полярный моменты инерции могут принимать только положительные значения, т.к. их подынтегральные выражения содержат квадраты координат.

Центробежный момент инерции сечения I_{xy}

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (4.9.)$$

Размерность центробежного момента инерции – $мм^4, см^4, м^4$.

В зависимости от знака координат центробежный момент инерции принимает как положительные, так и отрицательные значения, а также может быть равен нулю.

Свойство центробежного момента инерции.

Центробежный момент инерции фигуры относительно двух взаимно перпендикулярных осей равен нулю, если хотя бы одна из осей является осью симметрии.

Рассмотрим сечение в виде тавра, симметричного относительно оси y (рис.4.2).

Для данного сечения каждой площадке dA в первой четверти соответствует площадка dA во второй четверти с координатами, равными по оси ординат ($y = \text{const}$) и равными, но противоположными по знаку по оси абсцисс (x и $-x$). Следовательно, центробежный момент инерции относительно этих осей будет равен нулю.

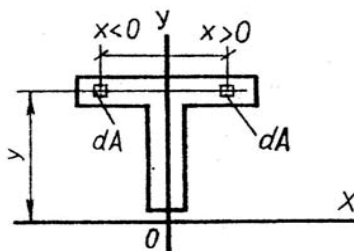


Рис. 4.2. Схема к определению главных осей инерции сечений

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются *главными осями инерции*.

Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются *главными центральными осями инерции*.

4.2. Моменты инерции простых и сложных фигур.

В расчетной практике часто приходится вычислять моменты инерции сложных сечений относительно различных осей, лежащих в плоскости фигуры. Для простых и

стандартных поперечных сечений стержней моменты инерции относительно различных осей даны в таблицах и ГОСТ наряду с размерами, площадями сечений, положениями центров тяжести и другими характеристиками. При вычислении моментов инерции сложных сечений их можно разбить на отдельные простые фигуры, моменты инерции которых известны. Так как моменты инерции представляют собой интегральные выражения, то для них справедливо основное свойство интеграла суммы: т.е. момент инерции сложной фигуры относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции ее составных частей относительно той же оси.

4.3. Зависимости между моментами инерции при параллельном переносе и повороте осей.

Рассмотрим какую-либо фигуру в системе координат xoy . Пусть моменты инерции относительно этих осей известны.

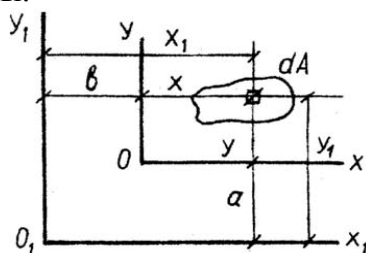


Рис.4.3. Схема к определению осевых моментов инерции относительно параллельных осей

Моменты инерции относительно новых осей x_1, y_1 , выбранных произвольно и проведенных параллельно осям x и y (рис. 4.3.) будут равны:

$$I_{y_1} = I_y + 2bS_y + b^2 A \quad (4.10.)$$

$$I_{x_1} = I_x + 2aS_x + a^2 A \quad (4.11.)$$

$$I_{x_1 y_1} = \int_A x_1 y_1 dA, = I_{xy} + abA + bS_x + aS_y \quad (4.12)$$

Если оси xoy – центральные ($S_x = 0$ и $S_y = 0$), то формулы (4.10, 4.11, 4.12.) примут вид:

$$I_{y_1} = I_y + b^2 A; \quad (4.13.)$$

$$I_{x_1} = I_x + a^2 A \quad (4.14.)$$

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + abA \quad (4.15)$$

Зависимость между моментами инерции при повороте координатных осей .

При повороте координатных осей (рис.4.4.) (угол α считаем положительным при повороте осей против хода часовой стрелки) моменты инерции площади сечения изменяются и определяются выражениями:

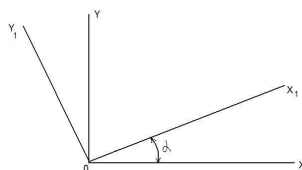


Рис. 4.4. Схема к определению осевых моментов инерции при повороте координатных осей

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \quad (4.16.)$$

$$I_{y_1} = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha \quad (4.17.)$$

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \quad (4.18.)$$

4.4. Положение главных осей инерции и главные моменты инерции

Положение главных осей инерции несимметричной фигуры определяется

выражением:
$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (4.19.)$$

Главные оси – оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю.

Практическое значение представляют положение главных центральных осей инерции сечения (будем обозначать их u , ϑ) и величина моментов инерции относительно этих осей (I_u , I_ϑ).

Главными центральными осями называются главные оси, проходящие через центр тяжести сечения. Моменты инерции относительно главных центральных осей называются *главными центральными моментами инерции* (всегда экстремальны). Величины главных центральных моментов инерции определяются выражением:

$$I_{\vartheta(\min)}^{u(\max)} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \quad (4.20.)$$

Вопросы для самопроверки.

1. Указать геометрические характеристики плоских сечений.
1. Какие оси называются центральными, главными, главными центральными.
2. Основное свойство полярного момента инерции.
3. Основное свойство центробежного момента инерции.
4. Определение моментов инерции при параллельном переносе осей.
5. Определение моментов инерции при повороте осей.
6. Положение главных центральных осей инерции.
7. Величина главных моментов инерции.

Список литературы

1. Волков А.Н., Соппротивление материалов (учебник), М.: КолосС, 2004. - 286 с.
2. Александров А.В., Соппротивление материалов (учебник), М.: В. Ш., 2008. - 560с.
3. Н.А.Костенко, С. В. Балясникова, Ю. Э. Волошановская, Соппротивление материалов (учебное пособие), М.: В. Ш., 2007. - 488с.
4. Ахметзянов М.Х., Соппротивление материалов (учебник), М.: В. Ш., 2007. - 334с.
5. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н. Соппротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2007. - 416с.
6. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н. Соппротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2010. - 430с.
7. Г.Д. Межецкий, Г.Г. Загребин, Н.Н. Решетник, А.А. Слепов. Соппротивление материалов (учебное пособие). Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2004. - 416 с.

Лекция 5

Напряженное состояние в точке тела.

5.1. Напряженное состояние в точке тела, виды напряженных состояний.

Совокупность напряжений по всевозможным площадкам (сечениям), проведенным через рассматриваемую точку, характеризует напряженное состояние в этой точке.

Исследуя напряженное состояние тела в произвольной точке B , в ее окрестности выделяют элемент в виде бесконечно малого параллелепипеда (рис. 5.1)

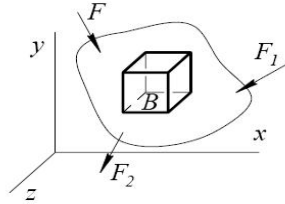


Рис. 5.1. Выделенный элемент в системе координат xuz

Анализ напряженного состояния в точке начинается всегда с определения напряжений на гранях выделенного в окрестности этой точки элемента. Известно, что через любую точку можно провести три взаимно перпендикулярные площадки на которых касательные напряжения равны нулю, а нормальные – экстремальны. Такие площадки называются *главными*, а нормальные напряжения, действующие по этим площадкам – *главными напряжениями*.

Главные напряжения обозначаются $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, причем:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

Если известны величины главных напряжений, то можно вычислить напряжения на любых площадках, проведенных в окрестностях точки, т. е. напряженное состояние точки вполне определено.

Площадки, по которым действуют только касательные напряжения, называют площадками *чистого сдвига*.

Виды напряженных состояний

В зависимости от количества главных напряжений, действующих на выделенный элемент, различают три вида напряженных состояний (рис. 5.2):

Линейное (одноосное); плоское (двухосное), объемное (трехосное)

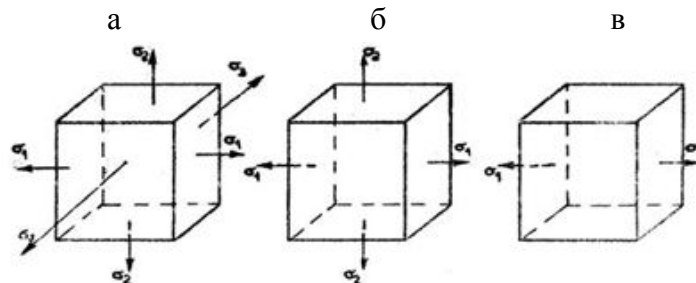


Рис. 5.2. Виды напряженных состояний:

а – объемное; б – плоское; в – линейное.

Объемное напряженное состояние (о.н.с.) – это состояние, при котором все три

главных напряжения отличны от нуля (рис. 5.2, а).

Плоским (п.н.с.) называют такое напряженное состояние, при котором два главных напряжения отличны от нуля (рис. 5.2, б).

Линейное напряженное состояние (л.н.с.) - такое напряженное состояние при котором одно главное напряжение отлично от нуля (рис. 5.2, в).

Л.н.с. встречается главным образом в элементах, работающих на осевое растяжение или сжатие.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся виды напряженных состояний - линейное и плоское.

5.2. Линейное напряженное состояние

Схема линейного напряженного состояния представлена на рис.5.3.

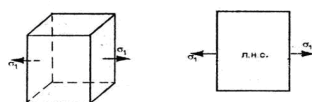


Рис. 5.3. Линейное напряженное состояние

Рассмотрим брус, работающий на осевое растяжение, т. е. в условиях линейного напряженного состояния (рис.5.4, а).

Нормальные напряжения, возникающие в произвольном поперечном сечении бруса (сечение 1-1) равны $\sigma_1 = F / A$ (рис. 5.4, б).

Полные напряжения, по любому наклонному сечению бруса (сечение 2-2) площадь которого равна $A_\alpha = A / \cos \alpha$ (рис.5.4.в), равны:

$$S_\alpha = \frac{F}{A_\alpha} = \frac{F}{A} \cos \alpha = \sigma_1 \cos \alpha \quad (5.1)$$

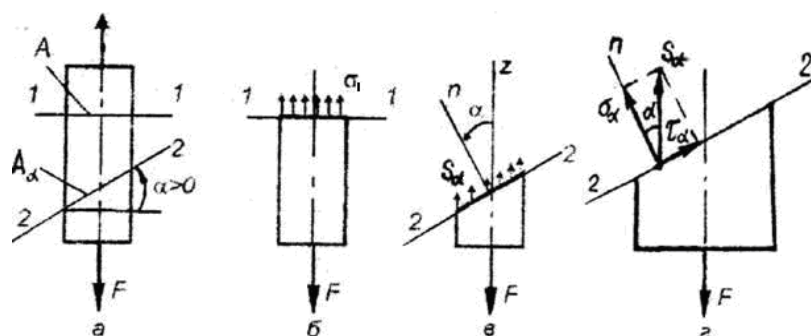


Рис.5.4. Напряжений в нормальной и наклонной площадках при осевом растяжении (сжатии):

Раскладывая полное напряжение в произвольной точке на нормальное и касательное (рис. 5.4, г), получаем:

$$\sigma_\alpha = S_\alpha \cos \alpha = \sigma_1 \cos \alpha \cos \alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha. \quad (5.2)$$

$$\tau_{\alpha} = S_{\alpha} \sin \alpha = \sigma_1 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha. \quad (5.3)$$

Анализируя формулы (5.2.) и (5.3.), отмечаем:

1) при $\alpha = 0^{\circ}$ ($\cos \alpha = 1$; $\sin 2\alpha = 0$), $\sigma_{0^{\circ}} = \sigma_1 = \sigma_{\max}$; $\tau_{0^{\circ}} = 0$, т.е. в поперечных сечениях бруса при осевом растяжении (сжатии) нормальные напряжения максимальны, а касательные отсутствуют.

2) при $\alpha = 90^{\circ}$ ($\cos \alpha = 0$; $\sin 2\alpha = 0$) $\sigma_{90^{\circ}} = \tau_{90^{\circ}} = 0$, т.е. в продольных сечениях бруса отсутствуют любые напряжения. Следовательно, при осевом растяжении (сжатии) главные площадки во всех точках бруса перпендикулярны и параллельны его продольной оси (оси z), а главные напряжения равны:

- при растяжении: $\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

- при сжатии: $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\sigma$;

3) касательные напряжения экстремальны при $\sin 2\alpha = 1$, т.е. в сечениях, наклоненных под углом $\alpha = 45^{\circ}$ к оси бруса и равны половине наибольших нормальных

напряжений $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}$; $\tau_{\min} = -\frac{\sigma_3}{2}$; (5.4)

Закон парности касательных напряжений.

На двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны по величине и противоположны по знаку (см. рис.5.5) т.е. $\tau_{\alpha_1} = -\tau_{\alpha}$ (5.5.)

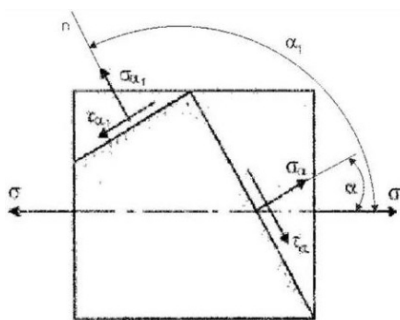


Рис.5.5. Напряжения на взаимно перпендикулярных площадках

Знак « \leftrightarrow » в выражении (5.5.) указывает, что напряжения в этих сечениях или сходятся к общему ребру, или расходятся от него (рис. 5.6.а), но не обтекают образовавшийся контур последовательно (рис. 5.6.б).

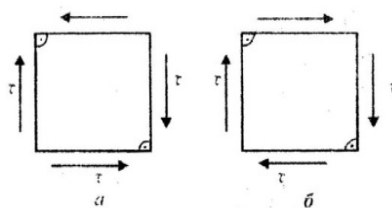


Рис. 5.6. Направление векторов касательных напряжений: а – правильное; б – неправильное

5.3. Плоское напряженное состояние

Плоское напряженное состояние встречается при сдвиге, кручении, изгибе и сложном сопротивлении.

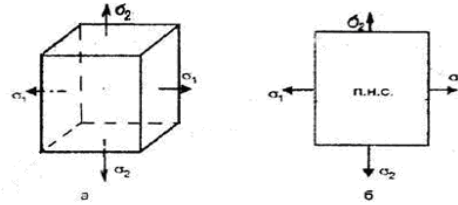


Рис. 5.7. Плоское напряженное состояние.

Рассмотрим напряженное состояние элемента бруса, когда по его граням действуют главные напряжения σ_1 и σ_2 . По фасадным граням элемента какие-либо напряжения отсутствуют, следовательно ($\sigma_3 = 0$).

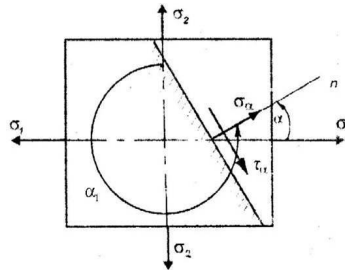


Рис. 5.8. Схема напряжений в наклонной площадке при плоском напряженном состоянии.

По наклонному сечению будут действовать как нормальные σ_α , так и касательные τ_α напряжения, зависящие от σ_1 и σ_2 .

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \quad (5.6.)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (5.7)$$

Если рассматривать общий случай плоского напряженного состояния, когда боковые грани выделенного элемента не являются главными площадками, то необходимо по этим площадкам указывать и касательные напряжения (рис. 5.9.),

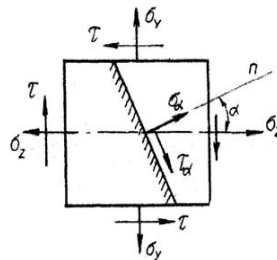


Рис 5.9. Напряжение на наклонной площадке при плоском напряженном состоянии.

Тогда выражения для нормальных и касательных напряжений на наклонных площадках примут вид: $\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau \cdot \sin 2\alpha$ (5.8.)

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau \cdot \cos 2\alpha \quad (5.9.)$$

Главные напряжения и положения главных площадок при плоском напряженном состоянии.

Положение главных площадок, т.е. площадок, на которых действуют экстремальные нормальные напряжения, а касательные напряжения равны нулю, определяются выражением:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau}{\sigma_z - \sigma_y}, \quad (5.10)$$

где: α_0 – угол наклона площадки к направлению действия наибольшего нормального напряжения (в нашем случае – σ_z).

Величина главных напряжений при п.н.с. определяется

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \quad (5.11.)$$

Вопросы для самопроверки.

1. Дать определение главных напряжений главных площадок, площадок чистого сдвига.
2. Виды напряженных состояний (дать определения)
3. Напряжения на наклонных площадках при л.н.с.
4. Закон парности касательных напряжений.
5. Напряжения на наклонных площадках при п.н.с.
6. Положение главных площадок при п.н.с.
7. Величина главных напряжений при п.н.с.

Список литературы

Основная

1. Волков А.Н., Сопротивление материалов (учебник), М.: КолосС, 2004. - 286 с.
2. Александров А.В., Сопротивление материалов (учебник), М.: В. Ш., 2008. - 560с.
3. Н.А.Костенко, С. В. Балясникова, Ю. Э. Волошановская, Сопротивление материалов (учебное пособие), М.: В. Ш., 2007. - 488с.
4. Ахметзянов М.Х., Сопротивление материалов (учебник), М.: В. Ш., 2007. - 334с.
5. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н. Сопротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2007. - 416с.
6. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н. Сопротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2010. - 430с.
7. Г.Д.Межецкий, Г.Г.Загребин, Н.Н.Решетник, А.А. Слепов. Сопротивление материалов (учебное пособие). Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2004. - 416 с.

Дополнительная

1. Саргсян А.Е. Сопротивление материалов, теория упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчётов. М: В. Ш., 2000.

Лекция 6

Сдвиг. Чистый сдвиг.

6.1 Сдвиг. Внутренние усилия и напряжения в поперечных сечениях бруса.

Деформация сдвига или среза может быть получена, когда брус с противоположных сторон на весьма близком расстоянии друг от друга действуют две равные силы, перпендикулярные оси бруса и направленные в противоположные стороны (рис. 6.1, а), или когда к брусу бесконечно малой высоты приложена сила, перпендикулярная его оси (рис. 6.1, б).

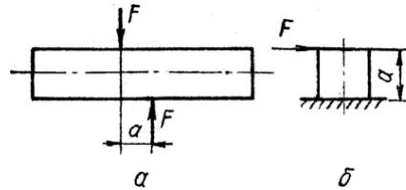


Рис. 6.1. Схема деформации сдвига

При сдвиге размер a настолько мал, что изгибающим моментом можно пренебречь.

Деформация сдвига вызывается внешними силами, перпендикулярными геометрической оси бруса. Следовательно, в его поперечных сечениях возникают только поперечная сила Q , которая определяется методом сечений и равна: $Q=F$. От поперечной силы возникают касательные напряжения, предполагая их равномерное распределение по плоскости поперечного сечения бруса получим:

$$\tau = \frac{Q}{A} \quad (6.1.)$$

6.2. Чистый сдвиг. Напряжения на наклонных площадках. Главные напряжения.

Чистый сдвиг – это такой вид плоского напряженного состояния, при котором гранях элемента, действуют только касательные напряжения (рис. 6.2.).

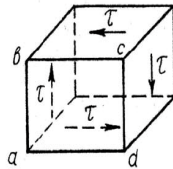


Рис.6.2. Касательные напряжения при чистом сдвиге

По фасадной грани $abcd$ нет ни нормальных, ни касательных напряжений; следовательно, эта грань – главная площадка, на которой главное напряжение равно нулю. Два других главных напряжения определим по формулам плоского напряженного состояния:

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha$$

Так как при чистом сдвиге $\sigma_z = \sigma_y = 0$, то эти выражения примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= -\tau \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha &= \tau \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (6.2.)$$

Главные площадки – площадки, где касательные напряжения равны нулю. Поэтому

для определения положения главных площадок при чистом сдвиге в выражении (6.2.) τ_α приравняем нулю и получим:

$$\tau_\alpha = \tau \cos 2\alpha = 0,$$

Так как $\tau \neq 0$, то $\cos 2\alpha = 0$, тогда $\alpha = \pm 45^\circ$.

Таким образом, *главные площадки* при чистом сдвиге располагаются под углом 45° к геометрической оси бруса или к направлению площадок чистого сдвига (рис. 6.3.).

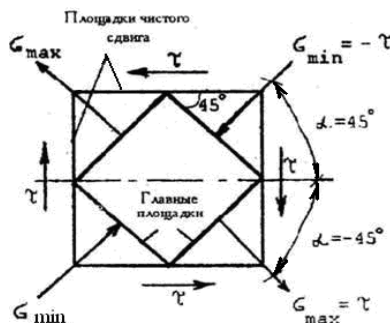


Рис 6.3. Положение главных площадок при сдвиге

Определив положение главных площадок, можно получить выражения для главных напряжений.

Так как $\sigma_\alpha = -\tau \sin 2\alpha$, а угол наклона главных площадок $\alpha = \pm 45^\circ$, то

$$\text{при } \alpha = 45^\circ \quad \sigma_\alpha = -\tau = \sigma_{\min};$$

$$\text{при } \alpha = -45^\circ \quad \sigma_\alpha = \tau = \sigma_{\max}$$

Итак, чистый сдвиг – случай плоского напряженного состояния, при котором главные напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \tau; \\ \sigma_2 &= 0; \\ \sigma_3 &= -\tau \end{aligned} \right\} \quad (6.3.)$$

6.3. Деформация при чистом сдвиге. Закон Гука при сдвиге

Рассмотрим деформацию элемента ABCD (рис.6.4) при чистом сдвиге.

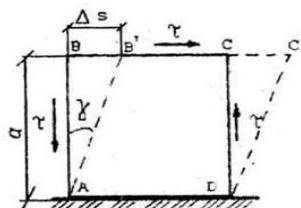


Рис. 6.4. Деформации при чистом сдвиге

Под действием касательных напряжений грань BC сдвинется параллельно грани AD на некоторую величину $BB' = CC' = \Delta s$ - абсолютный сдвиг.

Элемент ABCD деформируется, прямые углы станут острыми или тупыми, изменяясь на величину γ .

Угол γ – относительный сдвиг (угол сдвига).

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{\Delta s}{a} \quad (6.4.)$$

В пределах упругих деформаций между углом сдвига и соответствующими касательными напряжениями существует прямая пропорциональная зависимость (закон Гука)

$$\tau = G\gamma \quad (6.5.)$$

где G – коэффициент пропорциональности, называемый модулем упругости при сдвиге (или модулем упругости второго рода).

Модуль сдвига характеризует способность материала сопротивляться упругим деформациям при сдвиге. Модуль сдвига G , как и модуль упругости E , выражается в Паскалях (Па), мега паскалях (МПа) и т.д.

Закон Гука при чистом сдвиге:

$$\Delta s = \frac{Qa}{GA} \quad (6.6.)$$

где GA – жесткость сечения при сдвиге.

6.4. Расчет на прочность при сдвиге

Допускаемую величину касательных напряжений при чистом сдвиге τ_{adm} вычисляют на основании той или иной теории прочности. Для пластичных материалов обычно используют III и IV теории прочности.

Условие прочности при сдвиге (срезе) записывают в виде:

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{A} \leq \tau_{adm} \quad (6.7.)$$

где: τ_{adm} - допускаемое касательное напряжение.

Вопросы для самопроверки.

1. Дать определение сдвига, чистого сдвига. τ
2. Внутренние усилия при сдвиге.
3. Напряжения в нормальных и наклонных сечениях при сдвиге.
4. Главные напряжения при сдвиге.
5. Деформации при сдвиге. Закон Гука.
6. Положение главных площадок при сдвиге.
7. Расчет на прочность при сдвиге.

Список литературы

Основная

1. Волков А.Н. ,Соппротивление материалов (учебник), М.: КолосС, 2004. - 286 с.
- 2.Александров А.В., Соппротивление материалов (учебник), М.: В. Ш., 2008. - 560с.
- 3.Н.А.Костенко, С. В. Балясникова, Ю. Э. Волошановская , Соппротивление материалов (учебное пособие), М.: В. Ш., 2007. - 488с.
- 4.Ахметзянов М.Х., Соппротивление материалов (учебник), М.: В. Ш., 2007. - 334с.
- 5.Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н.Соппротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2007. - 416с.
- 6.Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н.Соппротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2010. - 430с.
- 7.Г.Д.Межецкий, Г.Г.Загребин, Н.Н.Решетник, А.А. Слепов. Соппротивление материалов (учебное пособие). Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2004. - 416 с.

Дополнительная

1. Феодосьев В.Г. Сопротивление материалов. М: МГТУ, 2000.
2. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. М: Наука, 1976.

Лекция 7

Кручение брусков круглого поперечного сечения.

7.1. Основные понятия. Внутренние усилия в сечениях вала.

Кручением называется такой вид деформации, при котором на брус действуют внешние скручивающие моменты (пары сил), лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси бруса.

Брус, работающий на кручение, называется *валом*. Моменты внешних пар обозначают m (рис.10.1).

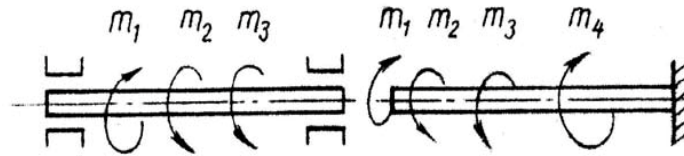


Рис.7.1. Схемы нагружения валов.

Деформация кручения вызывается парами сил (моментами), плоскость действия которых перпендикулярны оси вала. Следовательно, при кручении в поперечных сечениях вала возникает только крутящий момент – $M_{кр}$.

Внутренний крутящий момент определяют методом сечений. Вал мысленно рассекают плоскостью, перпендикулярной его геометрической оси, затем отбрасывают одну из частей (наиболее нагруженную), а ее действие на оставленную часть заменяют неизвестным моментом $M_{кр}$ (рис. 7.2).

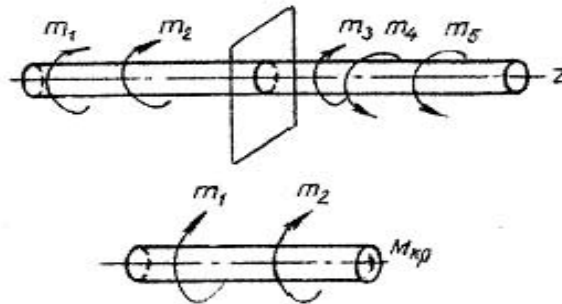


Рис. 7.2. Схема к определению крутящего момента

Для оставленной части вала записывают уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum M_z &= 0 \\ m_1 + m_2 - M_{кр} &= 0 \\ M_{кр} &= m_1 + m_2 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Таким образом, *крутящий момент* в поперечном сечении вала численно равен алгебраической сумме внешних моментов, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Правило знаков крутящего момента $M_{кр}$.

Крутящий момент считается положительным, если при взгляде в торец отсеченной части вала, действующий на него внешний момент направлен по ходу часовой стрелки (рис. 7.3).

Вопрос о нахождении опасных сечений вала, решается построением эпюры $M_{кр}$

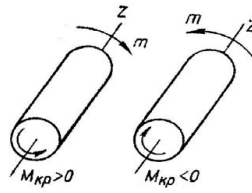


Рис. 7.3. Определение знака крутящего момента

7.2. Экспериментальная картина деформации круглого вала при кручении.

Рассмотрим деформацию вала круглого поперечного сечения, а затем перейдем к определению напряжений в его поперечных сечениях.

Для проведения экспериментальных исследований деформации кручения на поверхность вала наносится сетка, состоящая из линий, параллельных его оси, и линий, представляющих собой параллельные круги (на рис.7.4, а – линии, перпендикулярные оси вала).

После приложения к свободному концу вала внешнего скручивающего момента m , наблюдаем, что образующие цилиндра поворачиваются на один и тот же угол φ превращаясь в винтовые линии, а прямоугольники, нанесенные на поверхность вала (например, $abcd$ на рис.7.4, а), перекашиваются, обращаясь в ромбы ($a' b' c' d'$ на рис.7.4, б), т.е. подвергаются деформации сдвига. Параллельные круги (поперечные линии на рис. 7.4, а и б) не искривляются, и расстояние между ними практически не изменяется. Радиусы, проведенные в торцевых сечениях, остаются прямыми (рис.7.4. в), поворачиваясь на некоторый угол φ .

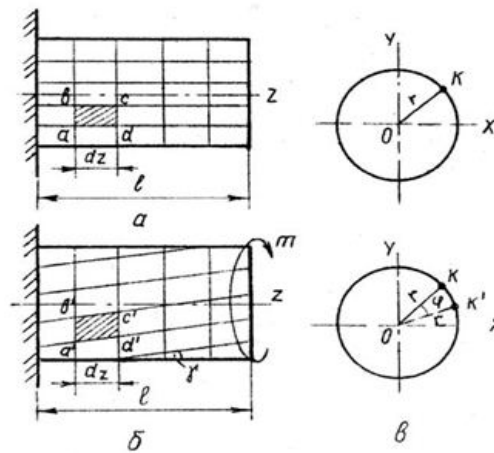


Рис.7.4. Деформации бруса при кручении

Результаты экспериментальных исследований дают основание для принятия гипотез, положенных в основу теории кручения валов круглого и кольцевого поперечных сечений.

Гипотезы теории кручения валов круглого сечения

1.Сечения, плоские до деформации, остаются плоскими после деформации, поворачиваясь друг относительно друга на некоторый угол (гипотеза плоских сечений).

2.Расстояния между поперечными сечениями в процессе деформации не изменяются, т.е. длина вала остается постоянной.

3. Радиусы поперечных сечений при деформации вала не искривляются.

7.3. Напряжения в поперечных сечениях вала при кручении. Изменение касательных напряжений по сечению вала.

На основании картины деформации вала при кручении (см. рис.7.4. б и в) можно отметить, что деформации по трем взаимно перпендикулярным направлениям x ; y и z отсутствуют, т.е. $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$. (7.2.)

На основании обобщенного закона Гука:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \right\} \quad (7.3.)$$

Система уравнений (7.3.) с учетом (7.2.) имеет решения в случае, если $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$. Следовательно, в поперечных сечениях вала отсутствуют нормальные напряжения, а его деформация происходит от касательных напряжений, т.е. $\tau \neq 0$, и сечения вала находятся в состоянии чистого сдвига.

Касательные напряжения в произвольной точке сечения равны:

$$\tau = \frac{M_{кр}}{I_p} \rho \quad (7.4.)$$

где: $M_{кр}$ – абсолютное значение крутящего момента в том сечении, в котором определяются касательные напряжения;

I_p – полярный момент инерции поперечного сечения вала;

ρ – текущий радиус (расстояние от центра тяжести сечения до точки, в которой определяется τ).

Из формулы (7.4) следует, что касательные напряжения в сечении вала изменяются по линейному закону прямо пропорционально расстоянию ρ .

Значения текущего радиуса ρ :

$$0 \leq \rho \leq r.$$

При $\rho = 0$ (на оси вращения) $\tau = 0$, а если $\rho_{\max} = r = d/2$ (у поверхности вала), то:

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{I_p} \rho_{\max} \quad (7.5.)$$

Полярный момент сопротивления при кручении:

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} \quad (7.6.)$$

W_p - это геометрическая характеристика поперечного сечения,
Для круга:

$$W_p^o = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2 d^3 \quad (7.7.)$$

С учетом выражений (7.5.) и (7.7.) максимальные касательных напряжения при кручении будут равны :

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} \quad (7.8.)$$

Таким образом, касательные напряжения возрастают от нуля в центре тяжести сечения до наибольшего значения τ_{\max} у поверхности вала. Следовательно, эпюра τ будет иметь вид, показанный на рис. 7.5.

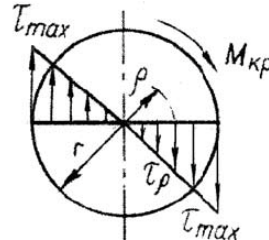


Рис10.5. Эпюра касательных напряжений

7.4. Деформация при кручении

Деформация вала круглого сечения при кручении характеризуется взаимным поворотом плоских сечений. Угол поворота одного сечения относительно другого называется *углом закручивания* и обозначается φ .

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GI_p} \quad (7.9.)$$

где: GI_p – жесткость сечения вала при кручении.

Размерность угла закручивания φ – рад.

Угол закручивания, приходящийся на единицу длины, называют *относительным углом закручивания* и обозначают θ . Он равен:

$$\theta_{\max} = \frac{M_{кр}}{GI_p} \leq \theta_{adm} \quad (7.10.)$$

Размерность относительного угла закручивания θ – рад/м.

7.5. Расчет валов на прочность и жесткость при кручении

При расчете валов на прочность для опасного сечения записывают условие прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} \leq \tau_{adm} \quad (7.11.)$$

где: τ_{\max} - наибольшее касательное напряжение в опасном сечении вала,

τ_{adm} – допускаемое касательное напряжения.

В ряде случаев вал должен удовлетворять не только условию прочности (7.11), но и условию жесткости:

$$\theta_{\max} = \frac{M_{кр}}{GI_p} \leq \theta_{adm} \quad (7.12.)$$

где: θ_{\max} - наибольший относительный угол закручивания, рад/м;

GI_p - жесткость поперечного сечения вала при кручении;

θ_{adm} - допускаемый угол закручивания.

Величина относительного угла закручивания зависит от условий работы вала и обычно составляет $0,15 \dots 2$ рад/м.

Вопросы для самопроверки.

1. Дать определение деформации кручения.
2. Внутренние усилия в сечениях вала.
3. Напряжения в сечениях вала при кручении.
4. Эпюра касательных напряжений для вала круглого сечения.
5. Деформации вала при кручении.
6. Расчет на прочность и жесткость при кручении.

Список литературы

Основная

1. Волков А.Н. ,Соппротивление материалов (учебник), М.: КолосС, 2004. - 286 с.
- 2.Александров А.В., Соппротивление материалов (учебник), М.: В. Ш., 2008. - 560с.
- 3.Н.А.Костенко, С. В. Балясникова, Ю. Э. Волошановская , Соппротивление материалов (учебное пособие), М.: В. Ш., 2007. - 488с.
- 4.Ахметзянов М.Х., Соппротивление материалов (учебник), М.: В. Ш., 2007. - 334с.
- 5.Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н.Соппротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2007. - 416с.
- 6.Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н.Соппротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2010. - 430с.
- 7.Г.Д.Межецкий, Г.Г.Загребин, Н.Н.Решетник, А.А. Слепов. Соппротивление материалов (учебное пособие). Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2004. - 416 с.

Дополнительная

- 1.Межецкий Г.Д. и др. Курс лекций по сопроотивлению материалов, ч.1, Саратов, СГАУ, 2001.
2. Степин А.А.Соппротивление материалов. М: В. Ш.,1983.
- 3.Дарков А.В. и др. Соппротивление материалов. М: В.Ш.,1989

Лекция 8

Прямой изгиб. Внутренние усилия. Дифференциальные зависимости между усилиями при изгибе.

8.1. Основные понятия. Определение опорных реакций.

Изгибом называется такой вид деформации, при котором на брус действуют внешние силы, перпендикулярные его геометрической оси, или пары сил (моменты), лежащие в плоскостях, проходящих через эту ось. Сама ось при этом искривляется (рис. 8.1).

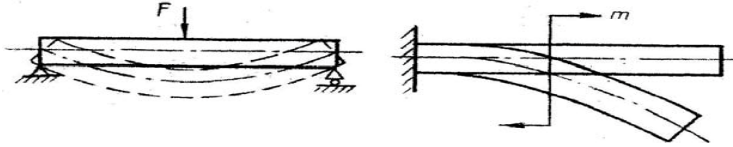


Рис. 8.1. Деформация балки при изгибе

Прямой брус, работающий на изгиб, называется *балкой*.

Изгиб называется плоским, если все нагрузки, действующие на балку, приложены в одной плоскости, называемой силовой.

Изгиб прямой если силовая плоскость совпадает с одной из главных центральных осей инерции поперечного сечения (рис. 8.2, а). На расчетной схеме балку принято заменять ее осью (рис. 8.2, б). При этом все нагрузки должны быть приведены к оси балки, т.е. силовая плоскость совпадает с плоскостью чертежа.

Неподвижность балок под действием внешних нагрузок обеспечивается благодаря наличию опорных закреплений (опор). В них возникают реакции, которые вместе с нагрузками представляют собой уравновешенную систему внешних сил, действующих на балку.

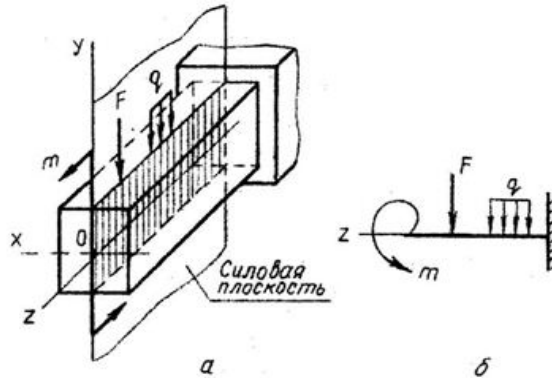


Рис. 8.2. Положение силовой плоскости при прямом изгибе

Из курса теоретической механики известно три основных типа опор плоских систем.

1. *Шарнирно-неподвижная опора* (рис. 8.3, а) допускает свободный поворот опорного сечения балки, препятствуя перемещению как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях. Поэтому в такой опоре возникают две составляющие реакции: вертикальная R_B и горизонтальная H_B .

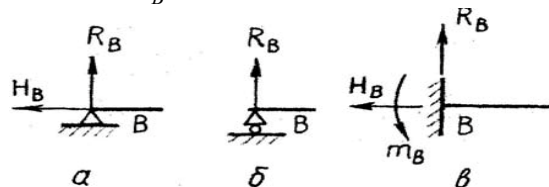


Рис. 8.3. Основные типы опор: а – шарнирно – неподвижная, б – шарнирно – подвижная; в – жесткая заделка (зашемление)

2. *Шарнирно-подвижная опора* (рис. 8.3, б) допускает не только поворот опорного сечения, но и горизонтальное перемещение балки, препятствуя лишь вертикальному

перемещению. В этой опоре возникает только одна составляющая опорной реакции – вертикальная R_B .

3. *Жесткая заделка, или защемление* (рис 8.3, в), не допускает ни поворота опорного сечения, ни вертикального и горизонтального перемещений балки. В общем случае плоского нагружения в заделке возникают вертикальная R_B и горизонтальная H_B составляющие реакции и реактивный момент m_B .

Балка может опираться на ряд опор указанных типов. В зависимости от типа опор различают следующие разновидности простейших статически определимых балок:

1. *Простая балка* – балка, свободно лежащая на двух опорах, имеющая одну неподвижную и одну подвижную шарнирные опоры (рис. 8.4, а). Расстояние между опорами называют пролетом l .

2. *Консоль* – балка, защемленная одним концом и не имеющая других опор (рис. 8.4, б). Длину такой балки называют вылетом l .

3. *Консольная балка* – балка, лежащая на двух опорах со свешивающимися концами, которые также называются консолями. В зависимости от их числа балка может быть двухконсольной (рис. 8.4, в) или одноконсольной (рис. 8.4, г).

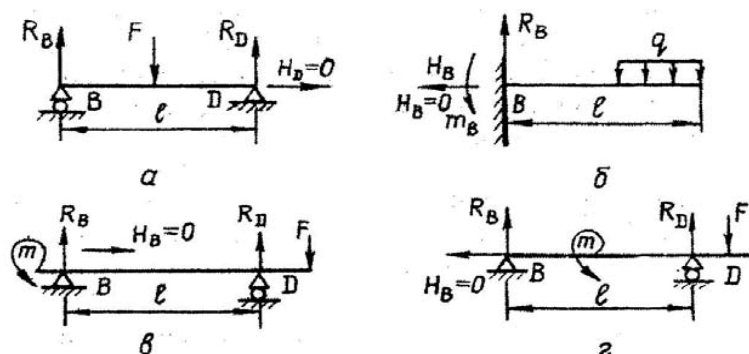


Рис. 8.4. Схемы простейших статически определимых балок: а - простая; б - консоль; в - двухконсольная; г - одноконсольная

Горизонтальные реакции шарнирно-неподвижных опор, жесткой заделки при изгибе всегда равны нулю, поскольку балка несет только вертикальную и моментную нагрузку (см. рис. 8.4).

Определение опорных реакций

Способы определения опорных реакций изучают в курсе теоретической механики, поэтому остановимся на некоторых практических вопросах.

Известно, что при определении неизвестных реакций для любой плоской системы можно составить три уравнения статики.

Рассмотрим однопролетную консольную балку (рис. 8.5) и на ее примере покажем методику определения опорных реакций.

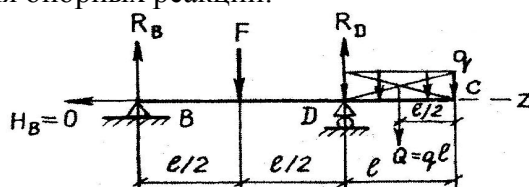


Рис. 8.5. Схема консольной статически определимой балки

1. Выбираем (произвольно) направления реакций и показываем их на рисунке.

Если в результате вычисления реакция получается отрицательной, то меняем на рисунке ее направление и в дальнейшем считаем эту реакцию положительной.

2. Если на балку действует нагрузка интенсивностью q , распределенная по всей или по какой-то части балки длиной l , то при определении опорных реакций ее мысленно приводят к равнодействующей, которая равна площади распределенной нагрузки ($Q = ql$) и приложена в ее центре тяжести.

3. Опоры обычно обозначают буквами (в нашем случае – B и D). Три неизвестные реакции определяют из следующих уравнений равновесия:

а) сумма проекций всех сил на ось балки равна нулю:

$$\sum z = 0 \quad (8.1)$$

Из данного уравнения находят горизонтальную реакцию H_B , которая (как было отмечено выше) при изгибе балок равна нулю;

б) сумма моментов всех сил относительно опорного шарнира B равна нулю

$$\sum M_B = 0 \quad (8.2)$$

Из уравнения (8.2) определяют вертикальную реакцию R_D ;

в) сумма моментов всех сил относительно опорного шарнира D равна нулю:

$$\sum M_D = 0 \quad (8.3)$$

Уравнение (8.3) позволяет определить вертикальную реакцию R_B .

4. Для контроля правильности определения опорных реакций можно воспользоваться одним из приведенных ниже уравнений статики:

сумма проекций всех сил на вертикаль (нормаль к геометрической оси балки) равна нулю:

$$\sum y = 0; \quad (8.4)$$

8.2. Внутренние усилия в сечениях балки при изгибе. Правило знаков внутренних усилий.

После того, как найдены и проверены опорные реакции, приступают к определению внутренних усилий в поперечных сечениях балки, используя метод сечений.

Рассмотрим балку, нагруженную силами F_1 и F_2 (рис. 8.6, а), и определим внутренние усилия в ее поперечных сечениях на некоторых силовых участках.

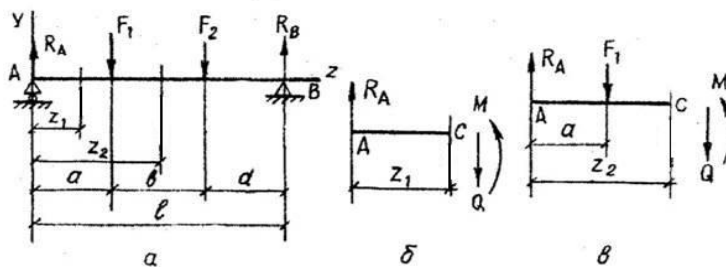


Рис. 8.6. Схемы к определению внутренних усилий в сечениях балки

Мысленно рассекаем балку (геометрическая ось которой показана на рис. 8.6, а) на произвольном расстоянии z_1 от левой опоры. Отбрасываем одну из образовавшихся частей (например, правую) и заменяем ее действие на оставшуюся (левую) неизвестными усилиями. Поскольку при прямом изгибе все нагрузки лежат в одной плоскости z_0y (см. рис. 8.2, а), они не дают проекций на оси z , x и моментов относительно осей y и z . Следовательно, в сечениях балки будут возникать: поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_x . Индексы осей x и y при буквенных обозначениях изгибающего момента и поперечной силы указываться не будут. Для определения Q и M в рассматриваемом сечении составим два уравнения равновесия:

$$\sum y = 0; \quad R_A - Q = 0, \text{ или } Q = R_A; \quad (8.5.)$$

$$\sum M_C = 0; \quad R_A z_1 - M = 0, \text{ или } M = R_A z_1, \quad (8.6.)$$

где c – центр тяжести поперечного сечения балки на расстоянии z_1 от опоры A .

Аналогично, рассмотрев сечение на расстоянии z_2 от левой опоры A (рис. 8.6. в), получим:

$$\sum y = 0; \quad R_A - F - Q = 0, \quad Q = R_A - F; \quad (8.7)$$

$$\sum M_C = 0; \quad R_A z_2 - F(z_2 - a) - M = 0, \quad M = R_A z_2 - F(z_2 - a), \quad (8.8)$$

. На основании полученных выражений можно сформулировать следующие правила для определения поперечной силы и изгибающего момента в поперечном сечении балки при изгибе.

1. *Поперечная сила Q* в произвольном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций всех сил, приложенных по одну сторону сечения, на нормаль к геометрической оси балки.

2. *Изгибающий момент M* в произвольном сечении балки равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения относительно его центра тяжести.

В частном случае нагружения поперечная сила в сечениях балки может отсутствовать – тогда изгиб является чистым. Чаще всего, однако, в сечениях балки наряду с изгибающим моментом возникают и поперечные силы. Такой изгиб называется поперечным.

Правило знаков для поперечных сил Q и изгибающих моментов M

Правило знаков обоих внутренних силовых факторов удобнее устанавливать, исходя из направления внешних нагрузок.

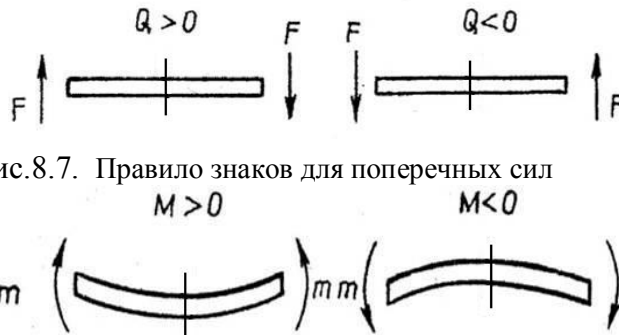


Рис.8.7. Правило знаков для поперечных сил

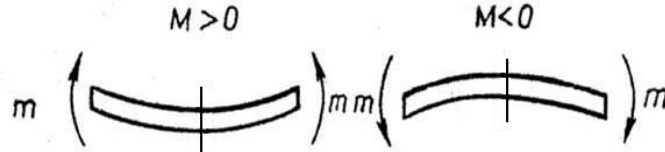


Рис. 8.8. Правило знаков для изгибающих моментов.

8.3 Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом M , поперечной силой Q и интенсивностью распределенной нагрузки q

Укажем дифференциальные зависимости, связывающие изгибающий момент M , поперечную силу Q и интенсивность распределенной нагрузки q .

Двумя бесконечно близкими сечениями выделим из балки элемент длиной dz (рис 8.9.а), на который действует распределенная нагрузка. Действие левой отброшенной части балки заменим поперечной силой Q и изгибающим моментом M , которые будем считать положительными (рис. 8.9. б). Аналогично поступим и с правой частью. Поскольку выделенный элемент бесконечно мал, нагрузку, распределенную по его длине, можно считать равномерной. В пределах элемента длиной dz сосредоточенные

силы и моменты к балке не приложены. Поэтому значения внутренних силовых факторов Q и M , заменяющих действие правой отброшенной части балки, будут равны $Q + dQ$ и $M + dM$, (рис.8.9.б.), где dQ и dM – бесконечно малые величины.

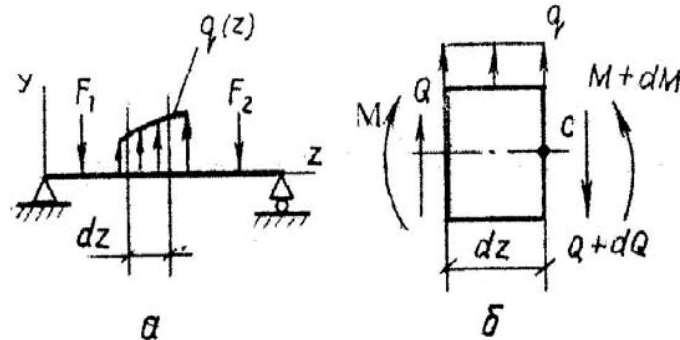


Рис. 8.9. Схема к определению дифференциальных зависимостей между M , Q , q

Запишем для выделенного элемента два уравнения равновесия:

- проекции всех сил на ось y :

$$\sum y = 0; \quad (8.9.)$$

$$Q - (Q + dQ) + qdz = 0;$$

$$Q - Q - dQ + qdz = 0;$$

$$dQ = qdz;$$

$$q = \frac{dQ}{dz}, \quad (8.10.)$$

- сумма моментов всех сил системы, находящихся слева от сечения, относительно т. С:

$$\sum M_C = 0; \quad M + Qdz + qdz \frac{dz}{2} - (M + dM) = 0;$$

$$M + Qdz + \frac{qdz^2}{2} - M - dM = 0$$

Приведя подобные члены и пренебрегая третьим слагаемым как бесконечно малой величиной второго порядка ($\frac{qdz^2}{2} = 0$), получим:

$$Q dz = dM \quad \text{или} \quad Q = \frac{dM}{dz} \quad (8.11.)$$

Взяв производную от обеих частей равенства (8.11.), получим:

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz}, \quad (8.12.)$$

или с учетом (8.10)

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = q \quad (8.13.)$$

Вопросы для самопроверки.

1. Дать определение изгиба, чистого и поперечного изгиба.
2. Какие стержни называются балками.
3. Какие внутренние усилия возникают в сечениях балки.
4. Какие виды опор используются в балках.
5. Какими уравнениями определяют опорные реакции.
6. Записать дифференциальные зависимости при изгибе.

Список литературы

Основная

1. Волков А.Н. ,Соппротивление материалов (учебник), М.: КолосС, 2004. - 286 с.
- 2.Александров А.В., Соппротивление материалов (учебник), М.: В. Ш., 2008. – 560с.
- 3.Н.А.Костенко, С. В. Балясникова, Ю. Э. Волошановская , Соппротивление материалов (учебное пособие), М.: В. Ш., 2007. – 488с.
- 4.Ахметзянов М.Х., Соппротивление материалов (учебник), М.: В.Ш., 2007. - 334с.
- 5.Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н.Соппротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2007. – 416с.
- 6.Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н.Соппротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2010. - 430с.
- 7.Г.Д.Межецкий, Г.Г.Загребин, Н.Н.Решетник, А.А .Слепов. Соппротивление материалов (учебное пособие). Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2004. - 416 с.

Дополнительная

1. Степин А.А.Соппротивление материалов. М: В.Ш. Школа,1983.
2. Дарков А.В. и др. Соппротивление материалов. М: В. Ш.,1989
3. Александров А.В. и др. Соппротивление материалов. М: В. Ш.,2000.

Лекция 9

Построение эпюр внутренних усилий. Контроль эпюр изгибающих моментов и поперечных сил.

9.1. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов для простейших балок.

Вопрос о нахождении опасных сечений произвольно нагруженной балки решается так же, как при растяжении (сжатии) и кручении, т.е. в результате построения эпюр внутренних усилий Q и M . Для этого записывают выражения Q и M в виде функций от положения сечения (абсциссы z). После составления уравнений Q_z и M_z абсциссам дают конкретные (граничные) значения в начале и конце силового участка. Вычисляя соответствующие значения Q и M , откладывают их в принятом масштабе от базисной линии, которая параллельна геометрической оси балки. Отметим, что эпюру изгибающих моментов принято строить со стороны сжатого волокна, т.е. отрицательные ординаты откладывают вниз, а положительные – вверх от базисной линии. На эпюре Q положительные значения также откладывают вверх от базисной линии.

Рассмотрим ряд примеров построения эпюр Q и M для наиболее характерных случаев нагружения балок.

Пример 1. Для заданной консольной балки построить эпюры Q и M .

Так как балка имеет один силовой участок (рис. 9.1), то определять опорные реакции нет необходимости. Проведем сечение на расстоянии z от правого свободного конца консоли и для него составим выражения Q_z и M_z :

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq l; \\ Q_z = F \end{aligned} \quad (9.1.)$$

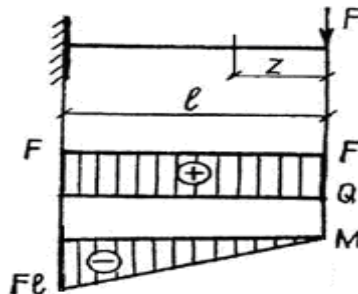


Рис. 9.1. Схема и эпюры внутренних усилий консольной балки

Из полученного уравнения (9.1) следует, что Q постоянна на протяжении всего участка, т.к. не зависит от переменной z . Следовательно, на рассматриваемом участке эпюра Q представляет собой прямую, параллельную базисной линии.

$$M_z = -Fz \quad (9.2.)$$

Эпюра изгибающих моментов представляет собой наклонную прямую (переменная z в первой степени). Для ее построения достаточно определить две точки – в начале и в конце участка: при $z=0$; $M_z=0$; при $z=l$; $M_z=-Fl$.

По полученным значениям строим эпюры Q и M (см. рис. 9.1.).

Пример 2. Для заданной консольной балки (рис. 9.2) построить эпюры Q и M .
Консоль имеет один силовой участок: $0 \leq z \leq l$;

$$Q_z = qz, \quad (9.3.)$$

где: qz – равнодействующая распределенной нагрузки на участке длиной z .

График уравнения (9.3.) представляет собой наклонную прямую. Для построения

эпюры Q_z дадим граничные значения переменной z :

$$\text{при } z=0; Q_z=0; \quad \text{при } z=l; Q_z=ql.$$

По полученным значениям строим эпюру Q (см. рис. 9.2.).

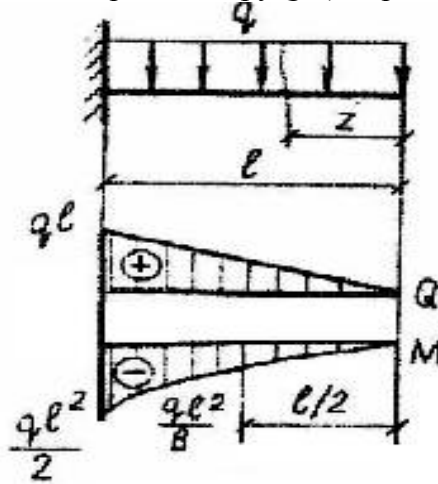


Рис. 9.2. Схема и эпюры внутренних усилий балки, нагруженной распределенной нагрузкой

$$M_z = -qz \frac{z}{2} = -\frac{qz^2}{2}, \quad (9.4.)$$

где: $z/2$ – плечо равнодействующей qz относительно рассматриваемого сечения.

График уравнения (9.4.) представляет собой квадратную параболу (z во второй степени). Учитывая, что эпюра M криволинейна, для ее построения вычисляем ординаты в трех сечениях: при $z=0; M_z=0$; при $z=l; M_z=-ql^2/2$; при $z=l/2; M_z=-ql^2/8$.

По полученным значениям строим эпюру M (рис. 9.2.).

9.2. Контроль правильности построения эпюр Q и M

Полученные дифференциальные зависимости при изгибе имеют важное практическое значение для контроля правильности построения эпюр внутренних усилий. Приведем ряд замечаний, часть которых основана на дифференциальных зависимостях, сформулировав их в виде пунктов контроля эпюр Q и M (рис. 9.3.).

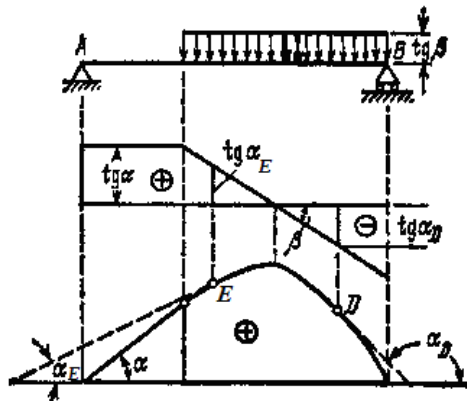


Рис. 9.3. Контроль построения эпюр Q и M

1. Каждая ордината поперечных сил Q геометрически представляет собой тангенс угла наклона α , образованного касательной к эпюре M в данной точке и базисной линией, т.к.

$$Q = \frac{dM}{dz} = \operatorname{tg} \alpha \quad (9.5.)$$

2. Если на некотором участке:

а) $Q > 0$, т.е. $\operatorname{tg} \alpha > 0$, то изгибающий момент возрастает слева направо по алгебраической величине:

б) $Q < 0$, т.е. $\operatorname{tg} \alpha < 0$, то изгибающий момент убывает слева направо по алгебраической величине:

в) Q при непрерывном изменении проходит через нуль, то изгибающий момент в соответствующем сечении имеет экстремальное значение на данном участке: если Q переходит от знака «плюс» к знаку «минус», $M_{(z)} = M_{\max}$; если Q переходит от знака «минус» к знаку «плюс», $M_{(z)} = M_{\min}$;

г) $Q = 0$, т.е. $\operatorname{tg} \alpha = 0$, то изгибающий момент – величина постоянная.

3. Если $q=0$, т.е. $dQ/dz=0$, то $Q = \text{const}$. Следовательно, на участке, где нет распределенной нагрузки, эпюра Q ограничена прямыми линиями, параллельными базисной линии, а эпюра M – наклонными прямыми, если только $Q \neq 0$.

4. На участках балки, где приложена равномерно распределенная нагрузка q , эпюра Q ограничена наклонными прямыми, а эпюра M – параболами второго порядка, обращенными выпуклостью в сторону противоположную действия нагрузки.

5. В сечениях, где к балке приложены сосредоточенные силы, на эпюре Q будут скачки, по модулю им равные, а на эпюре M – резкое изменение угла наклона (излом) смежных участков эпюры.

6. В сечениях, где к балке приложены сосредоточенные моменты, на эпюре M будут скачки, по модулю им равные, а на эпюре Q изменений не будет.

7. На концевой шарнирной опоре поперечная сила равна реакции этой опоры, а изгибающий момент равен нулю, если в опорном сечении не приложен внешний сосредоточенный момент.

8. В жесткой заделке Q и M соответственно равны опорной реакции и опорному моменту.

9. На свободном конце консоли изгибающий момент равен нулю, если нет внешнего сосредоточенного момента. Если на свободном конце нет сосредоточенной силы, то поперечная сила также равна нулю.

Вопросы для самопроверки.

1. Указать порядок построения эпюр внутренних усилий Q и M .
2. Как проверяется эпюра поперечных сил по скачкам.
3. Как проверяется эпюра изгибающих моментов по скачкам.
4. Перечислить пункты контроля эпюр внутренних усилий

Список литературы

Основная

1. Волков А.Н., Сопrotивление материалов (учебник), М.: КолосС, 2004.
- 286 с.

2. Александров А.В., Сопротивление материалов (учебник), М.: В.Ш., 2008. - 560с.
 3. Н.А.Костенко, С. В. Балясникова, Ю. Э. Волошановская, Сопротивление материалов (учебное пособие), М.: В.Ш., 2007. - 488с.
 4. Ахметзянов М.Х., Сопротивление материалов (учебник), М.: В. Ш., 2007. - 334с.
 5. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н. Сопротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2007. - 416с.
 6. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н. Сопротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2010. - 430с.
 7. Г.Д.Межецкий, Г.Г.Загребин, Н.Н.Решетник, А.А. Слепов. Сопротивление материалов (учебное пособие). Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2004. - 416 с.
- Дополнительная
1. Ивашенцев Г.А. и др. Изгиб статически определимых балок, метод руководство к лабораторным работам, СГАУ, Саратов, 2003.
 2. Ицкович Г.М.. руководство к решению задач по сопротивлению материалов, ВШ, М., 2001.

Лекция 10

Нормальные напряжения при изгибе.

10.1. Экспериментальное изучение работы материала при чистом изгибе.

В поперечных сечениях балки при прямом изгибе возникают два внутренних усилия: поперечная сила Q и изгибающий момент M . Расчетная практика показывает, что изгибающий момент в большинстве случаев имеет решающее значение при подборе сечения и проверке прочности балок.

Для выяснения характера распределения напряжений, вызываемых изгибающим моментом, и определения их значений рассмотрим случай чистого изгиба. На боковые грани балки прямоугольного поперечного сечения, выполненной из эластичного материала (например, резины), наносят сетку линий, параллельных и перпендикулярных ее геометрической оси (рис. 10.1, а). Затем балку загружают внешними моментами m , действующими в плоскости симметрии сечения, под действием которых она испытывает чистый изгиб (рис. 10.1, б). В результате деформации линии, параллельные оси бруса, искривляются, сохраняя между собой прежние расстояния. При указанном направлении m (см. рис. 1.1, б) эти линии в верхней части бруса укорачиваются, а в нижней – растягиваются, из чего можно заключить, что верхние волокна подвергаются сжатию, а нижние – растяжению.

Линии, перпендикулярные оси балки, после деформации остаются прямыми, но поворачиваются на некоторый угол. Изменяются и поперечные размеры балки (см. рис. 10.1, б): ширина в верхней части увеличивается, что соответствует продольному сжатию, а внизу (в растянутой зоне) – уменьшается.

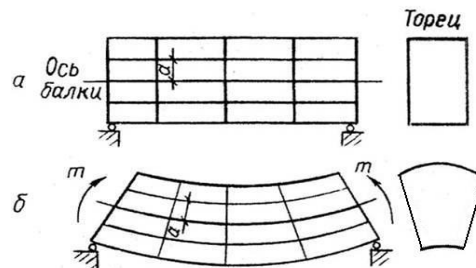


Рис. 10.1. Деформация балки при чистом изгибе: а – до приложения нагрузки; б – после приложения нагрузки.

Так как деформация продольных волокон по высоте балки меняется непрерывно, то на каком-то уровне есть слой волокон, не изменяющих своей длины, – так называемый *нейтральный слой*.

Нейтральный слой при прямом изгибе перпендикулярен силовой плоскости.

Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется *нейтральной осью*.

Деформация продольных волокон по ширине сечения, не зависит от их положения по ширине балки.

Экспериментальные исследования изгиба балок дают основание для ряда допущений (гипотез):

1. При чистом изгибе поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими после деформации (гипотеза плоских сечений).

2. Продольные волокна не давят друг на друга (т.е. $\sigma_y=0$) и, следовательно, под действием нормальных напряжений испытывают простое линейное растяжение или

сжатие.

10.2. Нормальные напряжения при чистом изгибе. Изменение нормальных напряжений по высоте поперечного сечения (эпюра σ)

В точках поперечных сечений балки внутренние изгибающие моменты вызывают нормальные напряжения, которые определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{M}{I_x} y \quad (10.1)$$

где: $M = M_{(z)}$ – абсолютное значение изгибающего момента в сечении, в котором определяются нормальные напряжения,

I_x – момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси;

y – расстояние от нейтральной оси до исследуемого волокна.

Из уравнения (10.1) следует, что величина нормальных напряжений меняется прямо пропорционально расстоянию y . Значит, напряжения распределены по высоте сечения по линейному закону: если $y = 0$ (на нейтральной оси), то $\sigma = 0$; если $y = y_{\max}$ (у поверхности балки), то $\sigma = \sigma_{\max}$.

Для сечений, имеющих горизонтальную ось симметрии, эпюра σ всегда будет иметь вид, представленный на рис. 10.2.

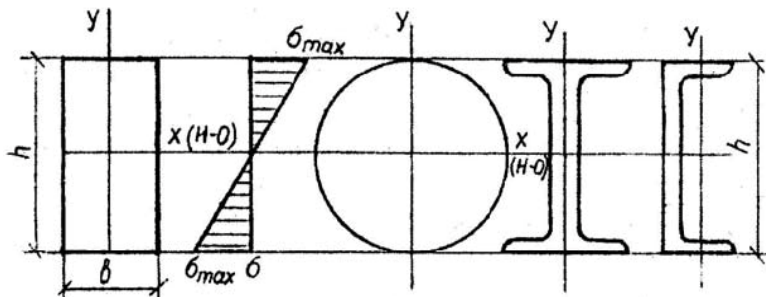


Рис. 10.2. Эпюры нормальных напряжений при изгибе для сечений, симметричных относительно оси x

Наибольшей величины напряжения достигают в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси, т.е. в случае симметрии сечения при $y = y_{\max}$. Тогда:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_x} y_{\max} \quad (10.2.)$$

Осейвой момент сопротивления при изгибе:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} \quad (10.3)$$

Размерность осевого момента W_x – мм³, см³, м³.

Выражение (10.2.) можно записать

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x} \quad (10.4)$$

Значения осевых моментов сопротивления простых фигур (прямоугольника, круга):

прямоугольник: $W_x^{\square} = \frac{bh^2}{6}$, круг: $W_x^{\circ} \approx 0,1d^3$

10.3. Расчет на прочность при изгибе по нормальным напряжениям .

Для проверки прочности материала балки по отношению к нормальным напряжениям необходимо записать условие прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x} \leq \sigma_{adm} \quad (10.5.)$$

где: σ_{\max} - максимальное нормальное напряжение в опасном сечении балки.

Условие прочности (10.5.) позволяет производить три вида расчета:

1. Проверку прочности балки;
2. Подбор размеров сечения:

$$W_x \geq \frac{M}{\sigma_{adm}};$$

3. Определение допускаемого изгибающего момента (по известным размерам поперечного сечения и σ_{adm}):

$$M_{adm} \leq W_x \sigma_{adm}$$

Вопросы для самопроверки.

1. Дать определение чистого изгиба.
2. Показать картину деформации балки при чистом изгибе.
3. Гипотезы при выводе формулы нормальных напряжений при чистом изгибе.
4. Формула нормальных напряжений при изгибе.
5. Эпюра нормальных напряжений для различных форм поперечных сечений балки.
6. Расчет на прочность по нормальным напряжениям.

Список литературы

1. Волков А.Н. ,Сопrotивление материалов (учебник), М.: КолосС, 2004. - 286 с.
2. Александров А.В., Сопrotивление материалов (учебник), М.: В. Ш., 2008. - 560с.
3. Н.А.Костенко, С. В. Балясникова, Ю. Э. Волошановская , Сопrotивление материалов (учебное пособие), М.: В. Ш., 2007. - 488с.
4. Ахметзянов М.Х., Сопrotивление материалов (учебник), М.: В.Ш., 2007. - 334с.
5. Межецкий Г.Д. ,Загребин Г.Г., Решетник Н.Н.Сопrotивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2007. - 416с.
6. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н.Сопrotивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2010. - 430с.
7. Г.Д.Межецкий, Г.Г.Загребин, Н.Н.Решетник, А.А. Слепов. Сопrotивление материалов (учебное пособие). Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2004. - 416 с.

Лекция 11

Касательные напряжения при поперечном изгибе.

11.1. Экспериментальное изучение работы материала при поперечном изгибе.

Известно, что при чистом изгибе в поперечных сечениях балки возникают только нормальные напряжения, вызываемые единственным внутренним усилием – изгибающим моментом M . В случае поперечного изгиба, когда в сечениях балки действует еще и поперечная сила Q , наряду с нормальными напряжениями σ в поперечных сечениях возникают и касательные напряжения τ .

Результаты эксперимента показывают, что возникновение касательных напряжений искажает полученную ранее (при чистом изгибе) картину деформации балки. При чистом изгибе под действием изгибающих моментов поперечные сечения балки, оставаясь плоскими, поворачиваются на некоторый угол. Под действием касательных напряжений при поперечном изгибе поперечные сечения балки искривляются. На рис. 11.1. показана картина деформации балки при поперечном изгибе.

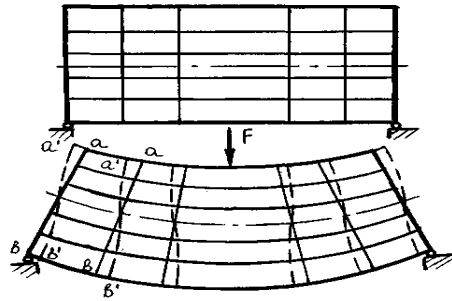


Рис. 11.1. Деформация балки при поперечном изгибе

Искривление поперечных сечений практически не отражается на деформациях продольных волокон балки (например, на рис. 11.1 $\sphericalangle aa' = \sphericalangle a'a''$; $\sphericalangle bb' = \sphericalangle b'b''$ и т.д.).

Таким образом, искривление плоскости поперечного сечения балки абсолютно не сказывается на величине нормальных напряжений. Следовательно, формулы (10.1) и (10.4), полученные для чистого изгиба, будут справедливы и для поперечного изгиба. Если поперечная сила изменяется по длине балки, то эти формулы при определении нормальных напряжений дают незначительную погрешность, которой можно пренебречь.

При выводе формулы касательных напряжений при поперечном изгибе русским ученым Д.И. Журавским были сделаны следующие допущения (гипотезы):

1. Направление касательных напряжений в сечении параллельно поперечной силе Q , которая является их равнодействующей.

2. Касательные напряжения, действующие по площадкам, расположенным на одинаковом расстоянии от нейтральной оси, равны между собой (т.е. $\tau = \text{const}$ по ширине сечения).

11.2. Касательные напряжения в сечениях балки при изгибе. Изменение касательных напряжений по высоте поперечного сечения (построение эпюры τ).

С учетом вышеперечисленных гипотез в 1855 году Д.И. Журавским была получена формула для определения касательных напряжений в поперечных сечениях балки при изгибе:

$$\tau = \frac{Q S_x^{\text{отсеч}}}{I_x b} \quad (11.1)$$

где: $Q = Q(z)$ – абсолютное значение поперечной силы в сечении, в котором

определяются касательные напряжения;

$S_x^{отсеч}$ – статический момент площади отсеченной части поперечного сечения (т.е. сечения, лежащего выше или ниже исследуемого волокна) относительно нейтральной оси;

I_x – момент инерции всего поперечного сечения относительно нейтральной оси;

b – ширина поперечного сечения балки на уровне, где определяют касательные напряжения.

Вид эпюры касательных напряжений зависит от формы поперечного сечения балки, рассмотрим наиболее часто встречающиеся (прямоугольное и двутавровое).

Прямоугольное сечение (рис. 11.2.), построим для него эпюру τ .

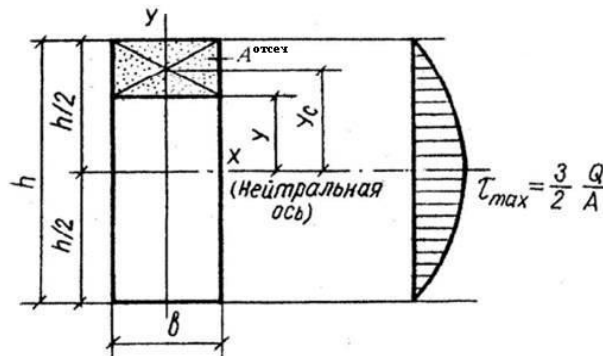


Рис. 11.2. Распределение касательных напряжений по высоте прямоугольного сечения.

Выделим произвольное волокно на расстоянии y от нейтральной оси и определим статический момент площади отсеченной (заштрихованной) части поперечного сечения.

По определению:

$$S^{отсеч} = A^{отсеч} y_c,$$

где: $A^{отсеч}$ – площадь отсеченной части;

y_c – расстояние от ее центра тяжести до нейтральной оси.

$$A^{отсеч} = b \left(\frac{h}{2} - y \right); \quad y_c = \frac{h}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right),$$

тогда:

$$S^{отсеч} = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = \left(\frac{bh}{2} - by \right) \left(\frac{h}{4} + \frac{y}{2} \right) = \frac{bh^2}{8} + \frac{bhy}{4} - \frac{bhy}{4} - \frac{by^2}{2} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Подставляя выражение $S_x^{отсеч}$ в формулу (11.1.), получим:

$$\tau = \frac{Q \cdot b}{I_x \cdot b \cdot 2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (11.2.)$$

Так как для прямоугольника $I_x = \frac{bh^3}{12}$, то формула (11.2.) примет вид:

$$\tau = \frac{Q \cdot 12b}{bh^3 b \cdot 2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

После сокращения получим:

$$\tau = \frac{Q \cdot 6}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (11.3.)$$

Таким образом, касательные напряжения τ меняются по высоте сечения по закону квадратной параболы.

Если $y = 0$ (на нейтральной оси), то $\tau = \tau_{\max}$.

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot 6}{bh^3} \frac{h^2}{4} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3Q}{2A} \quad (11.4.)$$

Если $y = y_{\max} = h/2$ (у поверхности балки), то τ будет равно:

$$\tau = \frac{Q \cdot 6}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right) = 0 \quad (11.5.)$$

По полученным значениям можно построить эпюру τ по высоте прямоугольного сечения (рис. 11.2.).

Эпюра касательных напряжений для двутаврового сечения будет иметь вид (рис.11.3.).

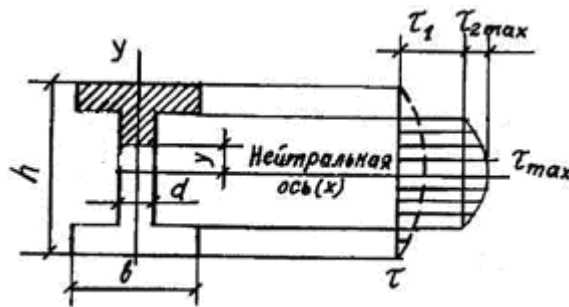


Рис.11.3. Распределение касательных напряжений по высоте двутаврового сечения.

11.3. Расчет на прочность по касательным напряжениям

В ряде случаев, в особенности для деревянных балок, прочность проверяется по касательным напряжениям.

Условие прочности имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{Q S_x^{\text{отсеч}}}{I_x b} \leq \tau_{adm} \quad (11.6.)$$

где: τ_{\max} - максимальное касательное напряжение в опасном сечении балки.

Как и ранее рассмотренные условия прочности, неравенство (11.6.) позволяет производить три известных вида расчета:

1. Проверочный расчет прочности.
2. Подбор размеров сечения.
3. Определение допустимой поперечной силы.

Как правило, для обычных балок, если материал удовлетворяет условию прочности по нормальным напряжениям, то и условие прочности по касательным напряжениям выполняется. Обычно, подобрав сечение балки из условия прочности по нормальным

напряжениям, далее проверку прочности выбранного сечения производят по касательным напряжениям.

Вопросы для самопроверки

1. Показать картину деформации балки при поперечном изгибе.
2. Гипотезы, положенные в основу вывода формулы касательных напряжений.
3. Формула касательных напряжений.
4. Эпюра касательных напряжений для прямоугольного сечения.
5. Расчет на прочность по касательным напряжениям.

Список литературы

Основная

1. Волков А.Н. ,Сопrotивление материалов (учебник), М.: КолосС, 2004. - 286 с.
2. Александров А.В., Сопrotивление материалов (учебник), М.: В. Ш., 2008. – 560с.
3. Н.А.Костенко, С. В. Балясникова, Ю. Э. Волошановская , Сопrotивление материалов (учебное пособие), М.: В. Ш., 2007. - 488с.
4. Ахметзянов М.Х., Сопrotивление материалов (учебник), М.: В. Ш., 2007. - 334с.
5. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н.Сопrotивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2007. - 416с.
6. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н.Сопrotивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2010. - 430с.
7. Г.Д.Межецкий, Г.Г.Загребин, Н.Н.Решетник, А.А.Слепов. Сопrotивление материалов (учебное пособие). Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2004. - 416 с.

Дополнительная

1. Беляев Н.М. Сопrotивление материалов. М: Наука,1976.

Лекция 12

Перемещения в балках при прямом изгибе.

12.1 Линейные и угловые перемещения в балках при прямом изгибе.

Перемещения поперечных сечений конструкций приходится определять при расчете их на жесткость и расчете статически неопределимых систем. Различают перемещения линейные и угловые.

Гипотезы (допущения), положенные в основу теории деформации при изгибе:

1. Сечение, плоское до деформации, остается плоским после деформации, поворачиваясь при этом на некоторый угол (гипотеза плоских сечений).
2. Учитываются деформации только от изгибающего момента, деформациями от поперечной силы пренебрегают как малыми.

При прямом изгибе наблюдается искривление геометрической оси балки, поперечные сечения при этом поворачиваются и одновременно получают поступательные перемещения (рис. 12.1). Искривленная ось балки называется *упругой линией*.

, оставаясь плоским, поворачивается вокруг нейтральной оси по отношению к своему первоначальному положению.

Угол, на который каждое сечение поворачивается по отношению к своему начальному положению, называется *углом поворота сечения* и обозначается θ – угловое перемещение.

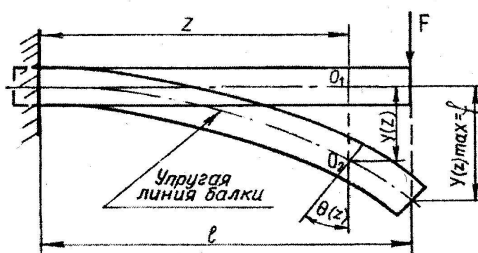


Рис. 12.1. Деформация консольной балки при прямом изгибе.

Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному к недеформированной оси балки, называется *прогибом* балки в данном сечении и обозначается y – линейное перемещение.

Длина изогнутой оси, принадлежащей нейтральному слою, при искривлении бруса не изменяется. Следовательно, при этом происходит смещение ее точек также и в направлении оси z , однако этими смещения пренебрегают, как малыми.

При деформации балки каждое сечение

Для практических целей необходимо уметь вычислять прогибы и углы поворота для любого сечения балки.

Выберем систему координат (рис. 12.2). Начало координат поместим на левом конце балки, ось z направим по геометрической оси балки, а ось y – вверх. Согласно выбранной системе координат положительным будем считать прогиб вверх, отрицательным – вниз.

Угол поворота θ будем считать положительным при повороте сечения против хода

часовой стрелки и отрицательным, если оно поворачивается по ходу часовой стрелки.

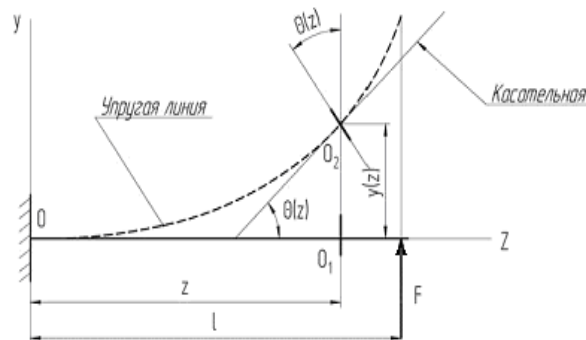


Рис. 12.2. Схема деформации балки при изгибе

Для выбранной системы координат (рис. 12.2) уравнение изогнутой балки имеет вид:

$$y = f(z). \quad (12.1)$$

Касательная к упругой линии балки в точке O_2 составит с осью z угол $\theta_{(z)}$, т.е. угол, равный углу поворота поперечного сечения балки относительно его первоначального положения. С другой стороны, тангенс угла, образованного касательной к кривой $y = f(z)$ с осью z , как известно, равен:

$$\operatorname{tg} \theta_{(z)} = \frac{dy}{dz}. \quad (12.2)$$

В упругой стадии работы материала углы поворота настолько малы (обычно не более 1°), что можно считать $\theta_{(z)} \approx \operatorname{tg} \theta_{(z)}$. Тогда (12.2) можно записать:

$$\theta_{(z)} = \frac{dy}{dz} \quad (12.3)$$

Полученное выражение (12.3) устанавливает связь прогибов и углов поворота.

Таким образом, для определения деформации балки в ее произвольном сечении, необходимо прежде всего получить уравнение упругой линии $y = f(z)$.

12.2. Дифференциальное уравнение упругой линии балки

Для того чтобы получить y как функцию от z , необходимо установить зависимость деформации балки от внешних нагрузок, ее размеров и материала. Известно, что:

$$\frac{1}{\rho_z} = \frac{M_z}{EJ_x}, \quad (12.4)$$

где: ρ_z – радиус кривизны участка изогнутой оси балки,

M_z – изгибающий момент в том же сечении;

EJ_x – жесткость поперечного сечения балки при изгибе.

Из курса высшей математики известна зависимость между радиусом кривизны

плоской кривой и координатами ее точек z и y :

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (12.5)$$

Для получения дифференциального уравнения изогнутой оси балки необходимо приравнять правые части уравнений (12.4) и (12.5):

$$\frac{M_z}{EJ_x} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (12.6)$$

Величина $dy/dz = \theta$, угол поворота сечения балки очень мала, поэтому ее квадратом можно пренебречь и уравнение (12.6) упрощается:

$$\frac{M_z}{EJ_x} = \pm \frac{d^2 y}{dz^2} \quad (12.7)$$

Уравнение (12.7) называется *приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси балки*. Индекс осевого момента инерции для краткости в дальнейших выражениях указываться не будет.

Выбор знака в уравнении (12.7) зависит от принятой системы координат. При положительном направлении оси y вверх (рис. 12.3, а) знаки изгибающего момента и второй производной совпадают поэтому в уравнении (12.7) можно оставить только знак «+». Тогда окончательно имеем приближенное дифференциальное уравнение упругой линии балки:

$$\frac{M_z}{EJ} = \frac{d^2 y}{dz^2} \quad (12.8)$$

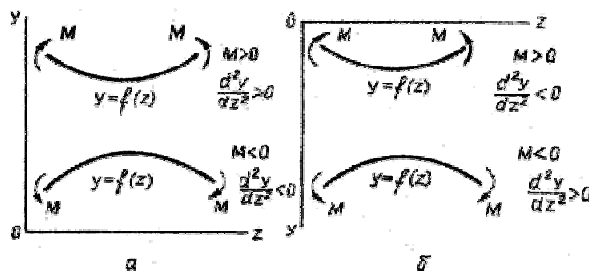


Рис. 12.3. Схема для определения знака в уравнении (12.7)

Интегрируя уравнение (12.8.) можно определить прогиб и угол поворота в произвольном сечении балки. Интегрирование усложняется, если балка имеет два или более силовых участков, т.к. необходимо определять большое количество постоянных интегрирования. Для уменьшения большой вычислительной работы разработан метод начальных параметров. Уравнения для определения прогибов и углов поворота,

полученные по этому методу называются универсальными уравнениями и имеют вид:

$$EJ\theta_z = EJ\theta_0 + \sum m_i(z - a_i) + \frac{\sum F_i(z - b_i)^2}{2} + \frac{\sum q_i(z - c_i)^3}{6} - \frac{\sum q_i(z - d_i)^3}{6}; \quad (12.9)$$

$$EJy_z = EJ\theta_0 z + EJy_0 + \frac{\sum m_i(z - a_i)^2}{2} + \frac{\sum F_i(z - b_i)^3}{6} + \frac{\sum q_i(z - c_i)^4}{24} - \frac{\sum q_i(z - d_i)^4}{24} \quad (12.10)$$

Уравнение (12.9) называется универсальным уравнением углов поворота, а уравнение (12.10) – универсальным уравнением прогибов.

В уравнениях (12.9) и (12.10) m_i, F_i, q_i – соответственно сосредоточенные моменты, силы (включая реактивные) и распределенные нагрузки, приложенные слева от рассматриваемого сечения; a_i, b_i, c_i, d_i – абсциссы точек приложения, соответственно, моментов и сил, начала и конца каждого участка, нагруженного распределенной нагрузкой. Знаки слагаемых определяются законом соответствующих силовых факторов.

Вопросы для самопроверки

1. Гипотезы теории перемещений.
2. Дать определение прогиба, угла поворота.
3. Связь прогибов и углов поворота.
4. Приближенное дифференциальное уравнение упругой линии балки.
5. Дать определение упругой линии балки.
6. Универсальное уравнение прогибов и углов поворота.

Список литературы

1. Волков А.Н., Сопротивление материалов (учебник), М.: КолосС, 2004. - 286 с.
2. Александров А.В., Сопротивление материалов (учебник), М.: В. Ш., 2008. - 560с.
3. Н.А.Костенко, С. В. Балясникова, Ю. Э. Волошановская, Сопротивление материалов (учебное пособие), М.: В. Ш., 2007. - 488с.
4. Ахметзянов М.Х., Сопротивление материалов (учебник), М.: В. Ш., 2007. - 334с.
5. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н. Сопротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2007. - 416с.
6. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н. Сопротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2010. - 430с.
7. Г.Д.Межецкий, Г.Г.Загребин, Н.Н.Решетник, А.А. Слепов. Сопротивление материалов (учебное пособие). Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2004. - 416 с.

Лекция 13

Сложное сопротивление. Косой изгиб.

13.1. Понятие сложного сопротивления.

В предыдущих лекциях были рассмотрены четыре вида простых сопротивлений : центральное (осевое) растяжение – сжатие , сдвиг, кручение и прямой изгиб.

Во всех этих случаях в поперечных сечениях стержня под действием нагрузки возникает только одно внутреннее усилие (продольная или поперечная сила, крутящий или изгибающий момент). Исключением является лишь общий случай прямого изгиба (поперечный изгиб), при котором в поперечных сечениях стержня возникают одновременно два внутренних усилия: изгибающий момент и поперечная сила. При этом в расчетах на прочность и жесткость, как правило, учитывается лишь одно внутреннее усилие – изгибающий момент.

Однако на практике чаще встречаются более сложные случаи, когда в поперечных сечениях стержня действуют несколько внутренних силовых факторов (внутренних усилий), одновременно учитываемых при расчете на прочность, например, изгиб с кручением, косой изгиб и т.д.

Эти случаи называют сложным сопротивлением. При решении таких задач используют принцип независимости действия сил, в соответствии с которым сложное сопротивление рассматривается как сумма нескольких простых сопротивлений при условии малости деформаций системы, т.е. можно применять способ сложения действия сил.

13.2. Косой изгиб. Внутренние усилия и напряжения.

Косым изгибом называется такой изгиб, при котором плоскость действия изгибающего момента проходит через ось балки, но не совпадает ни с одной из главных центральных осей инерции сечения (рис. 13.1.).

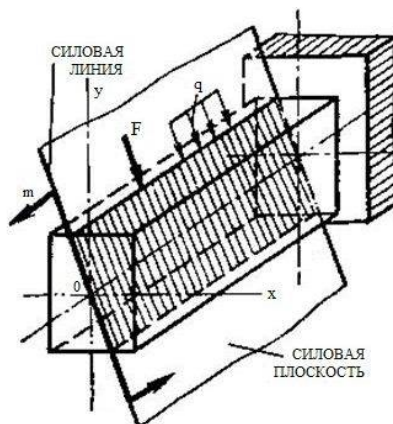


Рис. 13.1. Схема нагружения балки при косом изгибе

Определение усилий и напряжений при косом изгибе рассмотрим на примере консоли прямоугольного сечения, к которой приложена сосредоточенная сила F (рис. 13.2.) направленная под углом под углом α к оси x .

Разложив нагрузку F по главным центральным осям инерции сечения балки на горизонтальную F_x и вертикальную F_y составляющие , получим изгиб балки в двух главных плоскостях.

Таким образом, *косой изгиб* – сочетание двух прямых изгибов.

Вертикальная нагрузка изгибает балку относительно главной центральной оси x моментом M_x , горизонтальная нагрузка изгибает балку относительно оси y моментом M_y .

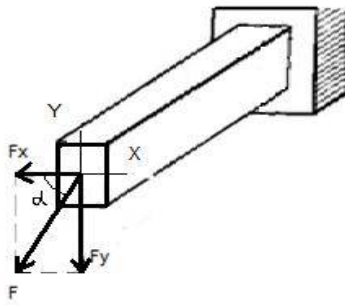


Рис. 13.2. Разложение нагрузки по главным центральным осям.

Вертикальная нагрузка изгибает балку относительно главной центральной оси x моментом M_x , горизонтальная нагрузка изгибает балку относительно оси y моментом M_y .

Моменты M_x и M_y являются внутренними усилиями при косом изгибе. Для их определения строятся эпюры изгибающих моментов в вертикальной плоскости (эпюра M_x) и в горизонтальной плоскости (эпюра M_y).

Действием поперечных сил (Q_x и Q_y) возникающих в сечениях балки пренебрегают.

На основании принципа независимости действия сил нормальное напряжение σ в любой точке поперечного сечения балки равно сумме нормальных напряжений от двух прямых изгибов, т.е.:

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \frac{M_x}{I_x} Y + \frac{M_y}{I_y} X \quad (13.1.)$$

где: M_x и M_y - внутренние изгибающие моменты относительно главных центральных осей инерции сечения x и y ;

I_x и I_y - осевые моменты инерции сечения относительно осей x и y ;

X и Y - координаты точек, в которых определяются напряжения.

13.3. Нулевая линия ее положение и свойства.

Нейтральной (нулевой) линией называется геометрическое место точек поперечного сечения, в которых нормальные напряжения равны нулю.

Нулевая линия делит сечение на две зоны: зону растяжения и зону сжатия.

Уравнение нулевой линии можно получить, приравняв напряжение по формуле (13.1) нулю

$$\frac{M_x}{I_x} Y + \frac{M_y}{I_y} X = 0 \quad (13.2)$$

Из анализа уравнения (13.2) следует, что нулевая линия является прямой, проходящей через центр тяжести сечения, и составляющей с осью x угол наклона φ (рис. 13.3):

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y} \quad (13.3)$$

Из анализа формул (13.2) и (13.3) вытекают основные свойства нейтральной (нулевой) линии при косом изгибе (рис. 13.3):

1. Нулевая линия проходит через центр тяжести сечения.
2. Нулевая линия не перпендикулярна линии действия силы.
3. Нулевая линия и линия действия силы проходят через разные четверти.

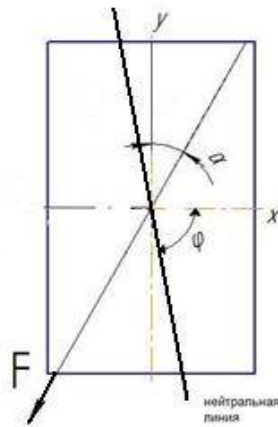


Рис 20.3. Положение нейтральной линии.

13.4. Расчет на прочность и деформации при косом изгибе.

Для оценки прочности материала при косом изгибе необходимо определить положение опасного сечения. Таким является сечение, в котором внутренние изгибающие моменты M_x и M_y имеют максимальные значения.

Значения M_x и M_y берутся с эпюр изгибающих моментов, построенных в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

Если M_x и M_y максимальны в разных сечениях балки, то необходимо определить максимальное напряжение в каждом из этих сечений и сравнить их между собой.

Максимальные нормальные напряжения возникают в точках сечения, наиболее удаленных от нулевой (нейтральной) линии. Такие точки сечения называются опасными. Напряжения в них определяются по формуле (13.1).

Для сечений, симметричных одновременно относительно главных осей x и y (прямоугольное, двутавровое и др.), опасными будут точки, одинаково удаленные от обеих осей - это угловые точки сечения. Следовательно, для таких сечений не обязательно искать положение нулевой линии. Для симметричных сечений при вычислении напряжений в формулу (13.1) нужно подставить координаты угловых точек X_{\max} , Y_{\max} :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} Y_{\max} + \frac{M_y}{I_y} X_{\max}$$

или:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \quad (13.4)$$

где: $W_x = \frac{I_x}{Y_{\max}}$ и $W_y = \frac{I_y}{X_{\max}}$ - осевые моменты сопротивления сечения относительно

главных центральных осей инерции - x и y .

Условие прочности, в этом случае, будет иметь вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq \sigma_{adm} \quad (13.5)$$

где: σ_{adm} - допускаемое напряжение для материала балки.

При подборе размеров прямоугольного сечения необходимо знать соотношение сторон прямоугольника. Затем, выразив W_x и W_y через одну из сторон, из условия прочности (13.5.) найти величины этих сторон.

При косом изгибе изгиб балки происходит не в плоскости действия внешних сил, а в плоскости, перпендикулярной к нейтральной линии.

Прогибы сечений балки определяются отдельно в каждой из главных плоскостей. Величину суммарного прогиба рассчитывают как сумму составляющих прогибов (рис 13.4.)

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (13.6)$$

где: v - суммарный прогиб;

v_x и v_y - прогибы балки вдоль главных осей x и y .

Эти прогибы можно определить с помощью формулы Верещагина, интеграла Мора, метода начальных параметров и т.д.

Суммарный прогиб балки перпендикулярен нейтральной линии.

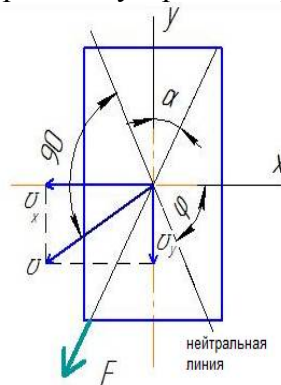


Рис 13.4. Взаимное положение в сечении балки нейтральной линии, линии действия силы и вектора прогиба v .

Вопросы для самопроверки.

1. Понятие сложного сопротивления.
2. Понятие косоугольного изгиба.
3. Внутренние усилия в сечениях балки.
4. Нормальные напряжения в произвольной точке сечения.
5. Понятие нулевой линии, ее положение и свойства.
6. Опасные точки сечения.
7. Условие прочности при косоугольном изгибе.
8. Деформации при косоугольном изгибе.

Список литературы

Основная

1. Волков А.Н., Сопротивление материалов (учебник), М.: КолосС, 2004. - 286 с.
2. Александров А.В., Сопротивление материалов (учебник), М.: В. Ш., 2008. - 560с.
3. Н.А.Костенко, С. В. Балясникова, Ю. Э. Волошановская, Сопротивление материалов (учебное пособие), М.: В. Ш., 2007. - 488 с.
4. Ахметзянов М.Х., Сопротивление материалов (учебник), М.: В. Ш., 2007. - 334с.
5. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н. Сопротивление материалов

- (учебник). М.: Дашков и К, 2007. - 416с.
- 6.Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н.Сопrotивление материалов
(учебник). М.: Дашков и К, 2010. - 430с.
- 7.Г.Д.Межецкий, Г.Г.Загребин, Н.Н.Решетник, А.А.Слепов. Сопrotивление материалов
(учебное пособие).Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2004. - 416 с.

Лекция 14

Изгиб с кручением брусьев круглого поперечного сечения.

14.1. Основные теории прочности.

Важнейшим вопросом, которым занимается сопротивление материалов, является вопрос прочности. При расчете на прочность деталей машин и элементов конструкций материал, которых находится в сложном напряженном состоянии (плоском или объемном) используется одна из теорий прочности.

Теория наибольших нормальных напряжений (первая теория прочности)

Условие прочности по I теории прочности :

$$\sigma^I_{рас} = \sigma_1 \leq \sigma_{adm} \quad (14.1)$$

где: $\sigma_{рас}$ - расчетное сопротивление.

К недостаткам первой теории прочности следует отнести то, что она учитывает лишь наибольшее главное напряжение, полагая, что два других не влияют на прочность.

Теория наибольших относительных деформаций (вторая теория прочности)

Условие прочности по II теории прочности:

$$\sigma^{II}_{рас} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_{adm} \quad (14.2)$$

Опытная проверка второй теории прочности свидетельствует о ее применимости лишь для хрупкого материала (легированный чугун, высокопрочная сталь после низкого отпуска).

Теория наибольших касательных напряжений (третья теория прочности)

Условие прочности по III теории прочности имеет вид :

$$\sigma^{III}_{рас} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{adm} \quad (14.3.)$$

Недостаток III теории прочности - не учитывается одно из главных напряжений.

Теория наибольшей удельной потенциальной энергии формоизменения (четвертая теория прочности – энергетическая)

Условие прочности по IV теории прочности:

$$\sigma^{IV}_{рас} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leq \sigma_{adm} \quad (14.4.)$$

Опыты хорошо подтверждают третью и четвертую теорию прочности для пластичных материалов.

14.2. Изгиб с кручением. Основные понятия и внутренние усилия в сечениях вала.

Изгибом с кручением называется деформация бруса под действием изгибающих и крутящих моментов (рис. 14.1).

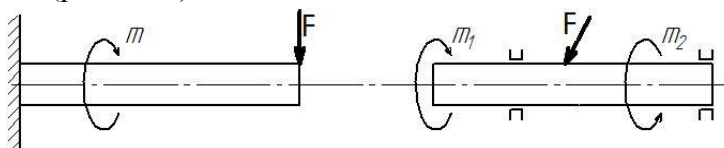


Рис. 21.1. Схема нагружения валов при изгибе с кручением.

Большинство валов машин испытывают кручение и изгиб. К числу таких деталей относятся коленчатые валы, валы со шкивами и т.д.

Так как сечение вала круглое, то при любом приложении внешних изгибающих сил вал будет испытывать кручение и прямой изгиб. Косой изгиб невозможен, т.к. все оси сечения главные.

В сечениях вала при изгибе с кручением возникают внутренние усилия: крутящий момент ($M_{кр}$), изгибающий момент ($M_{из}$) и поперечные силы Q , которые в расчете вала не учитываются.

Если вал нагружен в вертикальной и горизонтальной плоскостях, то необходимо определить изгибающие моменты относительно осей x и y , (M_x, M_y) затем суммарный изгибающий момент ($M_{из}$):

$$M_{из} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

14.3. Расчет вала на прочность.

Рассмотрим вал, работающий на изгиб с кручением (рис. 14.2). Для расчета вала на прочность необходимо установить положение опасного сечения. Для этого строят эпюры изгибающих и крутящих моментов (рис. 14.2).

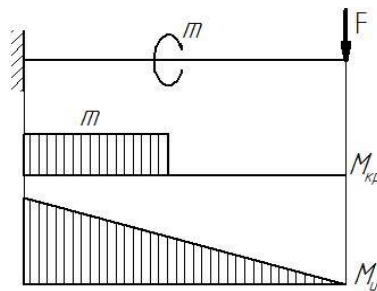


Рис. 14.2. Схема нагружения вала и эпюры крутящих и изгибающих моментов.

Для вала постоянного сечения опасным является сечение, где изгибающий и крутящий моменты максимальны одновременно. Если такого сечения нет, необходимо проверить прочность нескольких сечений.

После установления опасного сечения вала необходимо найти опасные точки сечения. Такими являются точки, лежащие у поверхности вала - это две диаметрально расположенные точки B и C (рис. 14.3).

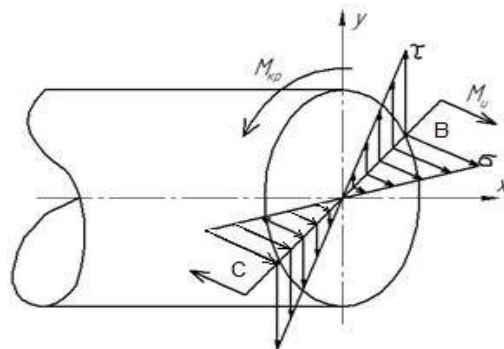


Рис. 14.3. Эпюры нормальных и касательных напряжений.

Максимальные нормальные напряжения определяются по формуле:

$$\sigma_{max} = \sigma_B = -\sigma_C = \frac{M_u}{W_u}; \quad W_u \approx 0,1d^3 \quad (14.5)$$

где: W_u – осевой момент сопротивления круглого сечения;

M_u – суммарный изгибающий момент в опасном сечении вала.

Максимальное касательное напряжение определяется по формуле:

$$\tau_{max} = \tau_B = \tau_C = \frac{M_{кр}}{W_p}; \quad W_p \approx 0,2d^3 \quad (14.6)$$

где: W_p – полярный момент сопротивления круглого сечения.

$M_{кр}$ – внутренний крутящий момент в опасном сечении вала.

Выделим в окрестности опасной точки C бесконечно малый элемент, боковая грань которого совпадает с поверхностью вала, две другие грани совпадают с поперечными сечениями (рис. 14.4).

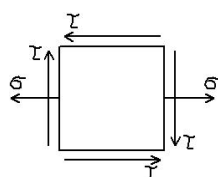


Рис. 14.4 Напряжение по граням выделенного элемента.

Выделенный элемент, испытывает плоское напряженное состояние. Главные напряжения при плоском напряженном состоянии определяются по формулам:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (14.7)$$

Расчет на прочность при плоском напряженном состоянии производится с применением теорий прочности. Для пластичных материалов применяют третью или четвертую теорию прочности.

По третьей теории расчетное напряжение определяется по формуле:

$$\sigma_{расч}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3$$

Подставляя вместо σ_1 и σ_3 их выражения (14.7), получаем:

$$\sigma_{расч}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (14.8.)$$

Аналогично получим $\sigma_{расч}$ по четвертой (энергетической теории прочности):

$$\sigma_{расч}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}, \quad (14.9.)$$

Подставим в расчетные напряжения (14.8.) и (14.9.) значения

$$\sigma_{max} = \frac{M_u}{W_u}, \quad \tau = \tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{M_{кр}}{2W_u}, \quad \text{получим:}$$

$$\sigma_{расч}^{III} = \frac{\sqrt{M_u^2 + M_{кр}^2}}{W_u}; \quad \sigma_{расч}^{IV} = \frac{\sqrt{M_u^2 + 0,75M_{кр}^2}}{W_u} \quad (14.10)$$

Расчетные моменты по теориям прочности:

$$M_{расч}^{III} = \sqrt{M_u^2 + M_{кр}^2} \quad \text{и} \quad M_{расч}^{IV} = \sqrt{M_u^2 + 0,75M_{кр}^2} \quad (14.11.)$$

Условие прочности при изгибе с кручением:

$$\sigma_{расч} = \frac{M_{расчmax}}{W_{\Omega}} \leq \sigma_{adm} \quad (14.12.)$$

Из условия прочности при необходимости можно найти диаметр вала:

$$\sigma_{расч} = \frac{M_{расчmax}}{0,1d^3} \leq \sigma_{adm}$$
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{расчmax}}{0,1\sigma_{adm}}}$$

Полученный диаметр округляют по ГОСТ в большую сторону.

Вопросы для самопроверки.

1. Основные теории прочности.
2. Дать определение изгиба с кручением.
3. Внутренние усилия в сечениях вала при изгибе с кручением.
4. Напряжения в сечениях вала при изгибе с кручением.
5. Опасные точки сечения вала и их напряженное состояние.
6. Расчетные моменты по третьей и четвертой теориям прочности.
7. Расчетные напряжения по третьей и четвертой теориям прочности.
8. Условия прочности при изгибе с кручением.

Список литературы

Основная

1. Волков А.Н., Соппротивление материалов (учебник), М.: КолосС, 2004. - 286 с.
2. Александров А.В., Соппротивление материалов (учебник), М.: В. Ш., 2008. - 560с.
3. Н.А.Костенко, С. В. Балясникова, Ю. Э. Волошановская, Соппротивление материалов (учебное пособие), М.: В. Ш., 2007. - 488 с.
4. Ахметзянов М.Х., Соппротивление материалов (учебник), М.: В.Ш., 2007. - 334с.
5. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н. Соппротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2007. - 416с.
6. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н. Соппротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2010. - 430с.
7. Г.Д.Межецкий, Г.Г.Загребин, Н.Н.Решетник, А.А.Слепов. Соппротивление материалов (учебное пособие). Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2004. - 416 с.

Дополнительная

1. Ицкович Г.М.. руководство к решению задач по соппротивлению материалов, ВШ, М., 2001.
2. Загребин Г.Г. и др. Расчетно-графические работы по соппротивлению материалов, учебные задания, СГАУ, 1999.

Лекция 15

Внецентренное растяжение- сжатие прямого бруса (ВРС).

15.1.Основные понятия внецентренного растяжения (сжатия)

Весьма часто продольная нагрузка бывает приложена не в центре тяжести поперечного сечения стержня, а с некоторым смещением (эксцентриситетом) относительно главных центральных осей инерции сечения (рис. 15.1), что вызывает внецентренное растяжение (сжатие) прямого бруса.

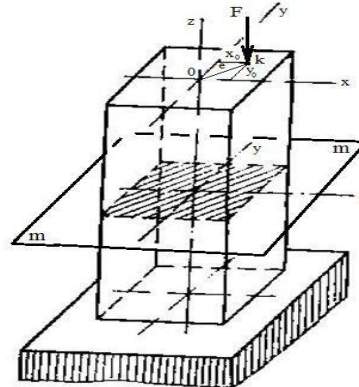


Рис.15.1 Схема нагружения бруса при внецентренном растяжении (сжатии)

Внецентренным растяжением (сжатием) называется деформация бруса под действием силы, приложенной параллельно оси бруса.

Пусть на брус произвольного сечения в точке К, называемой центром давления, действует сила F , параллельная оси бруса. Координаты точки К обозначим x_0 и y_0 , а расстояние от силы до центра тяжести сечения называемое эксцентриситетом « e » (рис. 15.1).

15.2.Внутренние усилия и напряжения при ВРС

Внутренние усилия определяются с помощью метода сечений. Рассекаем брус плоскостью $m - m$, и оставляем к рассмотрению верхнюю часть бруса (рис. 15.2).

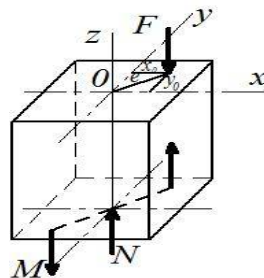


Рис. 15.2. Схема к определению внутренних усилий при ВРС

В сечении бруса возникают внутренние усилия, которые из уравнений равновесия равны: продольная сила $N = F$ и изгибающий момент $M_{из} = Fe$, так как плоскость действия изгибающего момента не совпадает с главными центральными осями сечения, то изгиб косой и его можно разложить на два прямых изгиба в главных

плоскостях:

$$M_x = F \cdot Y_0, \quad M_y = F \cdot X_0$$

Согласно принципу независимости действия сил, нормальное напряжение при внецентренном растяжении (сжатии) равно сумме нормальных напряжений от каждого внутреннего усилия:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot Y + \frac{M_y}{I_y} \cdot X$$

Учитывая, что $N = F$, $M_x = F \cdot Y_0$, $M_y = F \cdot X_0$ и введя радиусы инерции сечения i_x и i_y относительно главных осей:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

получим формулу нормальных напряжений в произвольной точке сечения:

$$\sigma = \pm \frac{F}{A} \left(1 + \frac{X_0 X}{i_y^2} + \frac{Y_0 Y}{i_x^2} \right) \quad (15.1)$$

где: X_0, Y_0 – координаты центра давления,

X, Y – координаты произвольной точки (в которой определяем напряжение).

Если брус растянут, берётся знак «+», если сжат – знак «-».

15.3. Нейтральная (нулевая) линия, ее положения и свойства.

Так как нейтральная линия – это геометрическое место точек, сечения в которых нормальные напряжения должны равняться нулю, то, приравняв нулю правую часть

уравнения (15.1) и полагая, что $\frac{F}{A} \neq 0$, получим уравнение нулевой линии:

$$1 + \frac{X_0 X}{i_y^2} + \frac{Y_0 Y}{i_x^2} = 0 \quad (15.2.)$$

где: i_x^2 и i_y^2 – квадраты радиусов инерции поперечного сечения бруса.

Из уравнения (15.2) следует, что *нулевая линия* есть *прямая*, не проходящая через центр тяжести сечения, а, следовательно, отсекающая на координатных осях отрезки m и n :

$$\text{на оси } x: \quad m = -\frac{i_y^2}{X_0}; \quad \text{на оси } y: \quad n = -\frac{i_x^2}{Y_0} \quad (15.3)$$

Свойства нулевой линии:

Нулевая линия делит сечение на две зоны: зону растяжения и зону сжатия.

Из анализа формул (15.2) и (15.3) вытекают основные свойства нулевой линии:

1. Нулевая линия не проходит через центр тяжести сечения.
2. Нулевая линия и центр давления (точка приложения силы) лежат по разные стороны от центра тяжести сечения бруса.

3. Если центр давления лежит на одной из главных центральных осей инерции сечения, то нулевая линия перпендикулярна этой оси и расположена с другой стороны от начала координат.

4. Если центр давления перемещается по прямой, пересекающей главные центральные оси, то нулевая линия вращается вокруг некоторого полюса.

15.4. Расчет на прочность.

Во всех поперечных сечениях бруса внутренние усилия N , M_x и M_y постоянны. Следовательно, для бруса с постоянными по длине сечениями все сечения равноопасны. Для бруса с переменными сечениями наиболее опасным будет сечение с меньшей площадью.

Опасными точками сечения являются точки, наиболее удалённые от нулевой линии. В этих точках напряжения максимальны. Если материал бруса пластичен, то достаточно определить наибольшее по абсолютной величине напряжение. Если материал хрупкий, то необходимо определить в зоне сжатия наибольшее сжимающее напряжение, а в зоне растяжения – наибольшее растягивающее напряжение. Полученные напряжения сравнить с допускаемыми.

Условие прочности для пластичных материалов:

$$|\sigma_{\max}| \leq \sigma_{\text{adm}} \quad (15.4)$$

где: σ_{adm} – допускаемое напряжение.

Условие прочности для хрупкого материала:

$$\sigma_{\max \text{ раст}} \leq \sigma_{\text{adm. раст}}; \quad \text{и} \quad \sigma_{\max \text{ сж}} \leq \sigma_{\text{adm. сж}} \quad (15.5)$$

где: $\sigma_{\text{adm. раст}}$ и $\sigma_{\text{adm. сж}}$ – допускаемые напряжения на растяжение и на сжатие соответственно.

15.5. Ядро сечения. Методика построения.

Ядром сечения называется область, расположенная вокруг центра тяжести сечения (рис. 15.3) и обладающая следующими свойствами:

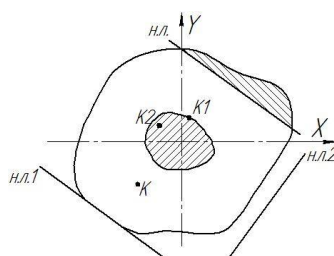


Рис. 15.3. К определению ядра сечения

-если центр давления (К) лежит вне ядра сечения, то нулевая линия пересекает поперечное сечение и делит его на две зоны (Н.Л.).

-если центр давления (К 1) лежит на контуре ядра сечения, то нулевая линия касается контура поперечного сечения, не пересекая его (Н.Л.1).

-если центр давления (К 2) лежит в ядре сечения, то нулевая линия проходит за контуром поперечного сечения (Н.Л.2).

Координаты контура ядра сечения X_0, Y_0 определяются по формулам:

$$x_0 = -\frac{i_y^2}{m}; \quad y_0 = -\frac{i_x^2}{n} \quad (15.6.)$$

Методика построения ядра сечения.

1. Определить положение центра тяжести поперечного сечения, главных центральных осей инерции Y и X , значения осевых моментов инерции I_x, I_y , квадратов радиусов инерции, i_y^2, i_x^2 , относительно этих осей.

2. Обкатать контур поперечного сечения нулевой линией, не пересекая его и для каждого положения нулевой линии определить отрезки m и n , отсекаемые нулевой линией на главных центральных осях инерции X и Y .

3. Для каждого положения нулевой линии установить координаты контура ядра сечения x_0 и y_0 по формулам (15.6).

5. Полученные центры давлений соединить прямыми линиями, внутри которых будет расположено ядро сечения.

15.6. Примеры расчета ядра сечения

Пример 1. Построить ядро сечения для прямоугольника (рис. 15.4).

Решение. Проводя последовательно нулевые линии через стороны прямоугольника, становятся известными отрезки m и n .

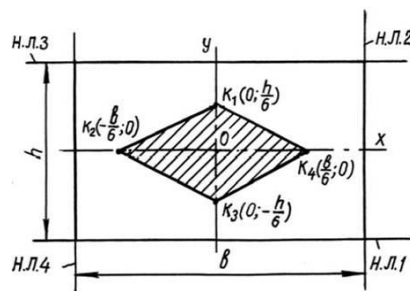


Рис. 15.4 Ядро сечения для прямоугольника.

Так, например, при проведении нулевой линии 1 известно, что $n = -\frac{h}{2}$, а $m = \infty$.

Определим для этого положения нулевой линии соответствующей ей центр давления $K_1 (x_0, y_0)$ по формуле (15.6):

$$x_0 = -\frac{i_y^2}{m}; \quad y_0 = -\frac{i_x^2}{n}$$

Т.к. $m = \infty$, следовательно $x_0 = 0$ (т.е. центр давления лежит на оси y): $n = -\frac{h}{2}$,

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{bh^3}{12bh} = -\frac{h^2}{12}$$

Тогда:

$$y_0 = -\frac{-h^2}{12\left(-\frac{h}{2}\right)} = \frac{h}{6},$$

т.е. центр давления для нулевой линии 1 имеет координаты $K_1\left(0; \frac{h}{6}\right)$.

Аналогично, проводя нулевые линии через три оставшиеся стороны прямоугольника, получим: $K_1\left(0; \frac{h}{6}\right); K_2\left(-\frac{b}{6}; 0\right); K_3\left(0; -\frac{h}{6}\right); K_4\left(\frac{b}{6}; 0\right)$.

Откладываем центры давлений на схеме, соединяем их отрезками прямых. В результате получаем ядро сечения, имеющее форму ромба (рис.15.4).

Пример 2. Построить ядро сечения для круга (рис. 15.5).

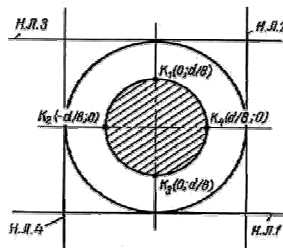


Рис. 15.5. Схема построения ядра сечения для круга.

Проведем нулевую линию и определим для нее центр давления по формулам (15.6). Для нулевой линии 1 центр давления определим из условия, что $m = \infty$, $x_0 = 0$. Следовательно, центр давления K будет лежать на оси y :

$$n = -\frac{d}{2}; \quad i_x^2 = \frac{I_x}{A}; \quad I_x = \frac{\pi d^4}{64}; \quad A = \frac{\pi d^2}{4};$$

$$i_x^2 = \frac{\pi d^4}{64} \frac{4}{\pi d^2} = \frac{d^2}{16}; \quad y_0 = -\frac{d^2 \cdot 2}{16d} = \frac{d}{8}.$$

Таким образом, $K_1 = \left(0; \frac{d}{8}\right)$.

Из симметрии сечения следует, что при других положениях нулевой линии центры давлений будут иметь координаты:

$$K_2 \rightarrow \left(-\frac{d}{8}; 0\right); \quad K_3 \rightarrow \left(0; -\frac{d}{8}\right); \quad K_4 \rightarrow \left(\frac{d}{8}; 0\right).$$

Построенное ядро сечения представляет собой круг диаметром $\frac{d}{8}$.

Вопросы для самопроверки.

1. Понятие внецентренного растяжения-сжатия (ВРС).
2. Внутренние усилия в сечениях бруса при ВРС.
3. Нормальные напряжения в сечениях бруса при ВРС.

4. Нулевая линия , ее уравнение , положение и свойства при ВРС.
5. Опасные точки в сечениях бруса при ВРС.
6. Расчет на прочность при ВРС.
7. Понятие ядра сечения.
8. Методика построения ядра сечения.

Список литературы

Основная

1. Волков А.Н. ,Соппротивление материалов (учебник), М.: КолосС, 2004. - 286 с.
2. Александров А.В., Соппротивление материалов (учебник), М.: В. Ш., 2008. - 560с.
3. Н.А.Костенко, С. В. Балясникова, Ю. Э. Волошановская , Соппротивление материалов (учебное пособие), М.: В. Ш., 2007. - 488с.
4. Ахметзянов М.Х., Соппротивление материалов (учебник), М.: В.Ш., 2007. - 334с.
5. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н.Соппротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2007. - 416с.
6. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н.Соппротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2010. - 430 с.
7. Г.Д.Межецкий, Г.Г.Загребин, Н.Н.Решетник, А.А.Слепов. Соппротивление материалов (учебное пособие).Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2004. - 416 с.

Дополнительная

1. Александров А.В. и др. Соппротивление материалов. М: В. Ш.,2000.
2. Саргсян А.Е. Соппротивление материалов, теория упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчётов. М: В. Ш., 2000.

Лекция 16 Продольный изгиб.

16.1. Основные понятия продольного изгиба. Формула Эйлера для определения критической силы.

Во всех предыдущих лекциях рассматривались расчеты на прочность элементов конструкции при различных видах деформаций. Однако разрушение этих элементов может произойти не только из-за нарушения прочности, но и от того, что они не сохранят той формы, которая им задана конструктором, при этом изменится и характер их напряженного состояния. Наиболее типичным примером является работа длинного тонкого стержня сжатого силой, который перед разрушением значительно искривится. Разрушение стержня произойдет из-за его неспособности сохранить прямолинейную форму, и вследствие его искривления появится изгибающий момент от сжимающей силы и следовательно дополнительные напряжения от изгиба. Поэтому для надежной работы конструкции ее элементы кроме проверки на прочность, должны проверяться на устойчивость.

Потерю устойчивости прямолинейной формы сжатого стержня называют «продольным изгибом».

Продольным изгибом называется изгиб стержня под действием осевой сжимающей силы.

Критической силой (F_{cr}) называется наименьшее значение осевой сжимающей силы, при которой происходит продольный изгиб.

Критическая сила является опасной силой для сжатого стержня, поэтому допускаемая нагрузка на сжатый стержень должна быть естественно меньше критической и равна :

$$F_{adm} = \frac{F_{cr}}{K_{уст}} \quad (16.1)$$

где: $K_{уст}$ – коэффициент запаса устойчивости; (для стали $K = 1,7 \div 2,2$);

F_{adm} – допускаемая нагрузка.

Для определения допускаемой нагрузки необходимо уметь определять величину критической силы.

Формула Эйлера для определения критической силы.

Впервые формулу для определения критической силы получил Л.Эйлер в 1744 году, рассмотрев стержень с шарнирно закрепленными концами (рис. 16.2).

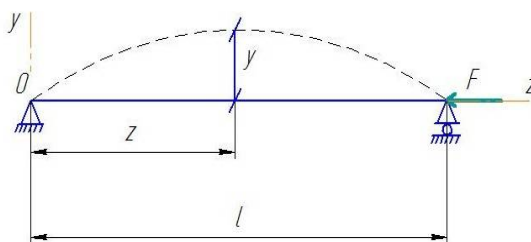


Рис. 16.2. Продольный изгиб стержня с шарнирно закрепленными концами
Формула Эйлера была получена при условии, что напряжения в стержне не превышают предела пропорциональности, ($\sigma_{cr} \leq \sigma_{pr}$). Решив дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня, Эйлер получил зависимость:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2} \quad (16.2),$$

формула Эйлера для стержня с шарнирно закрепленными концами.

где : I_{min} – минимальный осевой момент инерции сечения.

Если сечение стержня таково, что моменты инерции относительно главных центральных осей не равны между собой, то продольный изгиб произойдет в плоскости его наименьшей жесткости, поэтому в формуле (16.2) взятое минимальное значение осевого момента инерции.

При решении уравнения изогнутой оси стержня было получено, что изогнутая ось представляет собой синусоиду, имеющую n – полуволн.

$$y = C \sin\left(\frac{n\pi}{l}\right) z \quad (16.3)$$

где : C - постоянная интегрирования.

Минимальной критической силе соответствует синусоида с одной полуволной ($n = 1$), все последующие значения n ($n = 2, 3 \dots m$) дают большие значения критической силы и не рассматриваются (рис. 16.3).

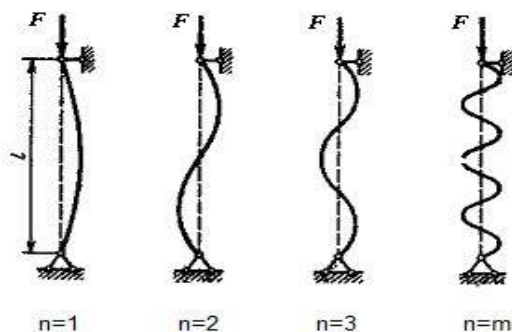


Рис 16.3. формы потери устойчивости стержня, отвечающие различным значениям n .

16.2. Влияние способов закрепления концов стержня на величину критической силы.

Рассмотренный Л.Эйлером случай продольного изгиба стержня с шарнирно закрепленными концами принято классифицировать как основной. При других способах закрепления значение критической силы может быть получено либо решением соответствующего дифференциального уравнения изогнутой оси стержня, либо сравнением формы изогнутой оси с той, которая представляет собой одну полуволну синусоиды (рис. 16.4).

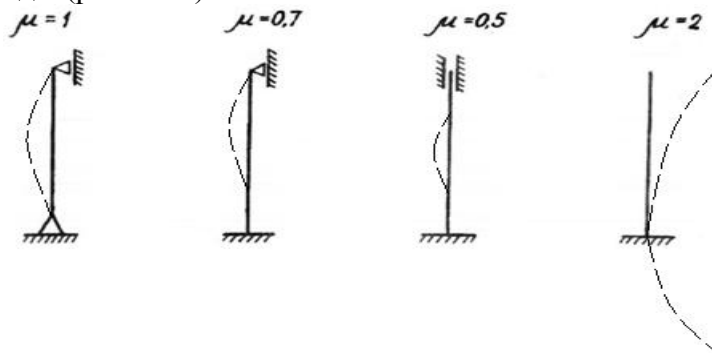


Рис. 16.4. Значения коэффициента μ для различных способов закрепления концов стержня

Формула Эйлера для определения критической силы с учетом способа закрепления концов стержня определяется как:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2} \quad (16.4)$$

где: $\mu l = L$ – приведенная длина стержня.

μ – коэффициент приведения, зависящий от способа закрепления концов стержня.

16.3. Критические напряжения. Условия применимости формулы Эйлера. Формула Ясинского

Напряжения от критической силы называются критическими напряжениями и равны :

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} \quad (16.5)$$

Подставим в (16.5.) выражение (16.4.) и введем обозначение.

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} \quad (16.6)$$

где: λ – гибкость стержня – безразмерная геометрическая характеристика стержня.

Гибкость стержня зависит от способа закрепления его концов, а также формы и размеров поперечного сечения.

С учетом гибкости стержня (16.6.) получим выражение критического напряжения:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (16.7)$$

Формула Эйлера получена в пределах выполнимости закона Гука ($\sigma_{cr} \leq \sigma_{pr}$).

Подставив в последнее выражение σ_{cr} из формулы (16.7) получим:

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}}$$

Т.к. в данном выражении под знаком корня все величины постоянны для одного материала, то обозначим его через λ_0 и назовём предельной гибкостью стержня:

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}} \quad (16.8)$$

где: σ_{pr} – предел пропорциональности материала.

Предельная гибкость стержня безразмерная величина, зависит только от механических свойств материала. Так для стали $\lambda_0 = 100$.

Таким образом, формула Эйлера применима при работе материала в зоне предела пропорциональности, т.е. при условии $\lambda \geq \lambda_0$.

$\lambda \geq \lambda_0$ - условие применимости формулы Эйлера.

За пределом пропорциональности, при условии $\lambda < \lambda_0$, критические напряжения определяются по эмпирической формуле Ясинского:

$$\sigma_{cr} = a - \sigma \lambda \quad (16.9)$$

где: a и σ – размерные коэффициенты, зависящие от материала:

(для стали: $a=310$ МПа, $b=1,14$ МПа).

В этом случае величина критической силы за пределом пропорциональности будет равна:

$$F_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = (a - b \lambda) A \quad (16.10)$$

График зависимости критических напряжений от гибкости стержней представлен на рис.16.5.(для стальных стержней)

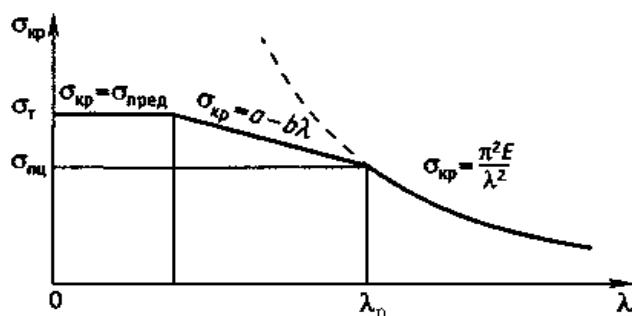


Рис 16.5.График зависимость критических напряжений от гибкости стержней:
1 - стержни малой гибкости; 2 -стержни средней гибкости;3- стержни большой гибкости,
 σ_y – предел текучести

16.4. Проверка сжатых стержней на устойчивость.

Для сжатых стержней любой гибкости должно выполняться условие устойчивости

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_{adm_{уст}} \quad (16.11)$$

где : $\sigma_{adm_{уст}}$ - допускаемое напряжение на устойчивость

$$\sigma_{adm_{уст}} = \frac{\sigma_{cr}}{K_{уст}}$$

где $K_{уст}$ - коэффициент запаса устойчивости.

Выразим допускаемое напряжение $\sigma_{adm_{уст}}$ через σ_{adm} :

$$\sigma_{adm_{уст}} = \varphi \sigma_{adm} \quad (16.12)$$

и подставив (16.12) в (16.11) получим условие устойчивости сжатого стержня:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi A} \leq \sigma_{adm} \quad (16.13)$$

где: φ – коэффициент продольного изгиба, зависит от механических свойств материала стержня и его гибкости. Определяется экспериментальным путем. Значения φ сведены в таблицы ($0 < \varphi < 1$).

Вопросы для самопроверки.

- 1.Понятие продольного изгиба и критической силы.
- 2.Формула Эйлера для определения критической силы.
- 3.Влияние способов закрепления концов стержня на величину критической силы.
- 4.Критические напряжения до предела пропорциональности и за пределом пропорциональности.
- 5.Гибкость стержня, предельная гибкость.
- 6.Условие применимости формулы Эйлера.
- 7.Условие устойчивости сжатого стержня.
8. График зависимости критических напряжений от гибкости стержня

Список литературы

Основная

1. Волков А.Н. ,Сопrotивление материалов (учебник), М.: КолосС, 2004. - 286 с.
2. Александров А.В., Сопrotивление материалов (учебник), М.: В.Ш., 2008. - 560с.
3. Н.А.Костенко, С. В. Балясникова, Ю. Э. Волошановская , Сопrotивление материалов (учебное пособие), М.: В.Ш., 2007. - 488 с.
4. Ахметзянов М.Х., Сопrotивление материалов (учебник), М.: В Ш., 2007. - 334с.
5. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н.Сопrotивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2007. – 416с.
6. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н.Сопrotивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2010. - 430с.
7. Г.Д.Межецкий, Г.Г.Загребин, Н.Н.Решетник, А.А.Слепов. Сопrotивление материалов (учебное пособие). Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2004. - 416 с.

Дополнительная

1. Саргсян А.Е. Сопrotивление материалов, теория упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчётов. М: В. Ш., 2000.
2. Феодосьев В.Г. Сопrotивление материалов. М: МГТУ, 2000.
3. Беляев Н.М. Сопrotивление материалов. М: Наука,1976.

Лекция 17 ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ.

17.1. Основные понятия.

Детали машин и элементы конструкций могут подвергаться действию как статических, так и динамических нагрузок. До сих пор все задачи сопротивления материалов: растяжение (сжатие), кручение, изгиб, сложное сопротивление решались при статическом действии нагрузок.

Нагрузка называется статической, если она возрастает постепенно от нуля до конечной величины. Статическая нагрузка практически не вызывает ускорения элементов конструкции, поэтому отсутствуют силы инерции.

Нагрузка называется динамической, если она прикладывается к конструкции за короткий промежуток времени или мгновенно. Динамическая нагрузка вызывает ускорение элементов конструкции, следовательно, появляются силы инерции. Динамическая нагрузка часто вызывает колебание элементов конструкций, что может привести к значительному увеличению деформаций и напряжений.

В основу расчета конструкций на динамическую нагрузку положен принцип Д.Аламбера. Согласно которому в любой момент времени можно рассматривать элементы конструкции как находящиеся в равновесии под действием внешних сил (включая реакции) и сил инерции. Это означает, что для конструкции, испытывающей динамическое воздействие, справедливы уравнения равновесия и метод сечений для определения внутренних усилий.

Если известно ускорение движения тела (конструкции), то сила инерции равна:

$$F_i = m \cdot a$$

где: m – масса тела, a – ускорение движения.

Сила инерции направлена в сторону обратную ускорению.

Динамическая нагрузка складывается из внешних сил и сил инерции.

Внутренние усилия, напряжения и деформации обозначаются:

$$N_d, M_d, \sigma_d, \tau_d, \Delta_d.$$

Динамические и статические величины связаны между собой коэффициентом, который называется динамическим и обозначается K_d .

$$\text{т.е. } N_d = N_{st} \cdot K_d, \quad M_d = M_{st} \cdot K_d, \quad \sigma_d = \sigma_{st} \cdot K_d, \quad \tau_d = \tau_{st} \cdot K_d, \\ \Delta_d = \Delta_{st} \cdot K_d.$$

Следовательно, задача сводится к определению динамического коэффициента от динамической нагрузки.

17.2. Определение динамического коэффициента при движении с ускорением.

Рассмотрим примеры определения динамического коэффициента K_d .

Движение груза с ускорением

а) Груз весом F движется вверх на тросе с ускорением " a ". Собственным весом троса пренебрегаем (рис 17.1.).

В состоянии покоя на трос действует сила F приложенная статически. При движении вверх с ускорением " a " появляется сила инерции $F_i = m \cdot a = \frac{F}{g} \cdot a$. Суммарная сила называется динамической.

$$F_d = F + F_i = F + \frac{F}{g} a = F \left(1 + \frac{a}{g} \right) = F \cdot K_d.$$

Выражение в скобках – величина постоянная и обозначим её как K_d

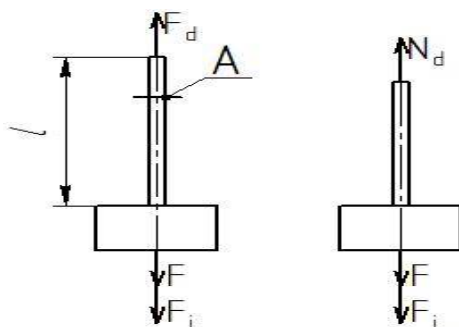


Рис 17.1. Движение груза с ускорением.
 K_d -динамический коэффициент при движении с ускорением.

$$K_d = 1 + \frac{a}{g} \quad (17.1)$$

Если учесть собственный вес троса:

$$F_{d_{max}} = (\gamma Al + F) + F_i = (\gamma Al + F) + \frac{(\gamma Al + F)}{g} \cdot a = (\gamma Al + F) \left(1 + \frac{a}{g}\right) = (\gamma Al + F) K_d.$$

где γAl – собственный вес троса.

Динамическая продольная сила:

$$N_d = N_{st} \cdot K_d, \quad N_{d_{max}} = N_{st_{max}} \cdot K_d,$$

Динамическое напряжение:

$$\sigma_{d_{max}} = \frac{N_{st_{max}}}{A} K_d = \sigma_{st} \cdot K_d.$$

б) вращение груза с постоянной угловой скоростью

Груз весом F вращается на жесткой нити (весом нити пренебрегаем) с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси (рис. 17.2.). Радиальное ускорение $a = \omega^2 r$.

$$\text{Динамический коэффициент } K_d = 1 + \frac{a}{g} = \left(1 + \frac{\omega^2 r}{g}\right). \quad (17.2.)$$

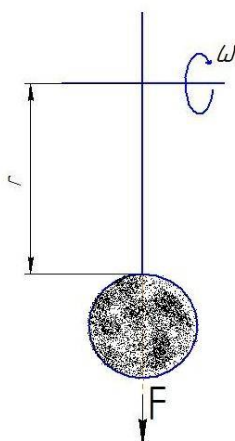


Рис. 17.2. Движение с ускорением.

17.3. Ударная нагрузка. Определение динамического коэффициента K_d без учета массы упругой системы.

Ударная нагрузка самая опасная из динамических нагрузок. Нагрузка называется ударной, если она прикладывается к системе за очень короткий промежуток времени или мгновенно. В зависимости от характера соударяющихся тел удар может быть: сжимающим, растягивающим, изгибающим, крутящим и сложным. На рис 17.3 показаны виды удара.

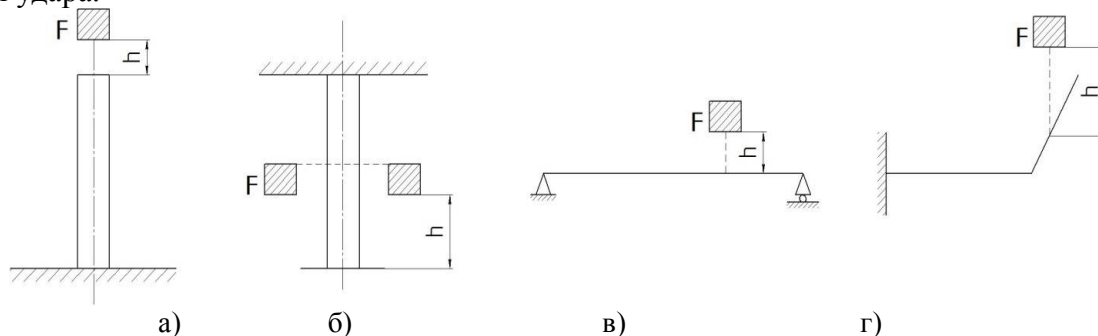


Рис 17.3. Виды удара.

- а) сжимающий удар, б) растягивающий удар, в) изгибающий удар, г) сложный удар (изгиб с кручением)

Теория удара основана на гипотезах.

- 1) Ударяющее тело не отскакивает от ударяемой системы.
- 2) Напряжения и деформации при ударе связаны законом Гука, т.е. $\sigma_d = E \epsilon_d$
- 3) Эпюра перемещений системы при ударе подобна эпюре перемещений от груза, приложенного статически (рис 17.4.).

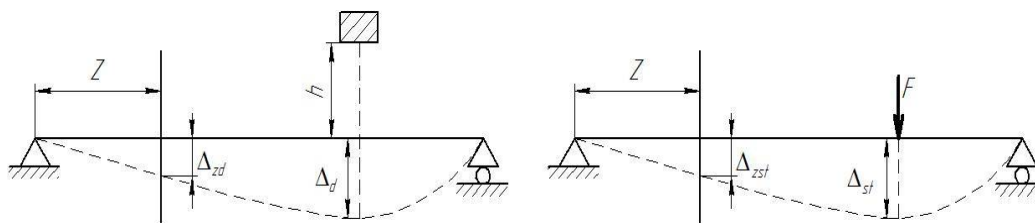


Рис 17.4. Эпюры перемещений от груза весом F

Согласно этой гипотезе: $\frac{\Delta z_d}{\Delta z_{st}} = \frac{\Delta d}{\Delta st} = K_d$,

где: Δz_d и Δz_{st} – динамические деформации;

Δd и Δst – статические деформации.

$$\Delta z_d = \Delta z_{st} \cdot K_d; \quad \Delta d = \Delta st \cdot K_d.$$

Т.к. материал подчиняется закону Гука, согласно которому напряжения пропорциональны деформациям, следовательно:

$$\frac{\sigma_d}{\sigma_{st}} = \frac{\Delta d}{\Delta st} = K_d;$$

отсюда:

$$\sigma_d = \sigma_{st} \cdot K_d. \quad (17.3.)$$

Задача сводится к определению динамического коэффициента K_d

Определение динамического коэффициента K_d без учета массы упругой системы.

Положим, что масса упругой системы мала и ей можно пренебречь. Обозначим через Δ_d перемещение системы по направлению ударяющей силы F сразу после удара (рис 17.5.).

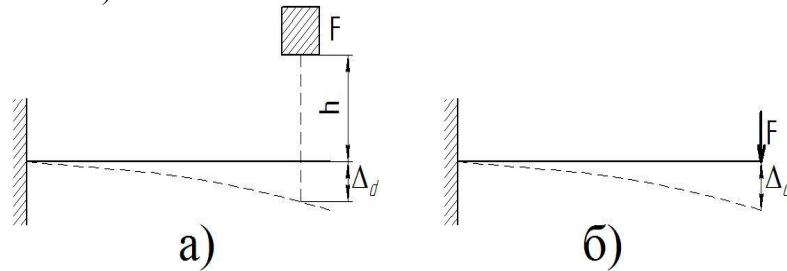


Рис.17.5. Ударное воздействие на систему.

Работа груза F после падения с высоты h будет равна потенциальной энергии деформации - рис. 17.5 а:

$$U = F(h + \Delta_d)$$

Такую же потенциальную энергию вызывает динамическая сила F_d , приложенная статически - рис.17.5 б:

$$U = \frac{F_d \Delta_d}{2}$$

Приравнивая правые части формул, получим:

$$F(h + \Delta_d) = \frac{F_d \Delta_d}{2};$$

где:

$$F_d = F \cdot K_d; \quad \Delta_d = \Delta_{st} \cdot K_d$$

отсюда:

$$F(h + \Delta_{st} \cdot K_d) = \frac{F \cdot K_d^2 \cdot \Delta_{st}}{2}$$

После упрощения получим квадратное уравнение:

$$K_d^2 \Delta_{st} - 2K_d \Delta_{st} - 2h = 0$$

Решая уравнение, получим динамический коэффициент при ударе:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} \quad (17.4)$$

где: h – высота падения груза,

Δ_{st} – перемещение сечения системы в месте падения груза, если груз приложен статически.

Δ_{st} определяется либо способом Верещагина (для линейных систем) или способом Мора (для любых систем).

Если известна скорость падающего груза " ϑ ":

$$\vartheta = \sqrt{2gh}; \quad \vartheta^2 = 2gh; \quad h = \frac{\vartheta^2}{2g}$$

Тогда динамический коэффициент равен:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{\vartheta^2}{g\Delta_{st}}} \quad (17.5)$$

Если груз приложен мгновенно (удар), то в этом случае $h = 0$.

Тогда динамический коэффициент равен 2.

$$K_d = 1 + \sqrt{1} = 2.$$

17.4. Оценка прочности при динамической нагрузке.

Для оценки прочности материала конструкции необходимо определить динамический коэффициент K_d и максимальное статическое напряжение $\sigma_{st.max}$ от нагрузки, приложенной статически. Условие прочности при любом динамическом воздействии будет иметь вид:

$$\sigma_{d max} = \sigma_{st.max} K_d \leq \sigma_{adm} \quad (17.6.)$$

где: σ_{adm} - допускаемое нормальное напряжение для материала конструкции.

Вопросы для самопроверки.

1. Понятие статических и динамических нагрузок.
2. Понятие динамического коэффициента. Связь статических и динамических величин.
3. Динамический коэффициент при движении с ускорением.
4. Понятие удара, виды удара, гипотезы, принятые при ударе.
5. Динамический коэффициент при ударе.
6. Динамический коэффициент при мгновенно приложенной нагрузке.

Список литературы

Основная

1. Волков А.Н., Сопротивление материалов (учебник), М.: КолосС, 2004. - 286 с.
2. Александров А.В., Сопротивление материалов (учебник), М.: В.Ш., 2008. - 560с.
3. Н.А.Костенко, С. В. Балясникова, Ю. Э. Волошановская, Сопротивление материалов (учебное пособие), М.: В. Ш., 2007. - 488с.
4. Ахметзянов М.Х., Сопротивление материалов (учебник), М.: В. Ш., 2007. - 334с.
5. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н. Сопротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2007. - 416с.
6. Межецкий Г.Д., Загребин Г.Г., Решетник Н.Н. Сопротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2010. - 430с.
7. Г.Д.Межецкий, Г.Г.Загребин, Н.Н.Решетник, А.А.Слепов. Сопротивление материалов (учебное пособие). Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2004. - 416 с.

Дополнительная

1. Степин А.А. Сопротивление материалов. М: В. Ш., 1983.
2. Дарков А.В. и др. Сопротивление материалов. М: В.Ш., 1989
3. Александров А.В. и др. Сопротивление материалов. М: В. Ш., 2000.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров А.В., Сопротивление материалов (учебник) М.: В.Ш., 2008. 560 с.
2. Ахметзянов М.Х., Сопротивление материалов (учебник), М.: В.Ш., 2007. - 334 с.
3. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. М : Наука, 1976.
4. Волков А.Н. ,Сопротивление материалов (учебник), М.: КолосС, 2004.
5. Вольмир А.С., Григорьев Ю.П. Марьин В.А. Сопротивление материалов (лабораторный практикум), М.: Дрофа, 2004. - 352 с.
6. Горшков В.Н., Межецкий Г. Д., Решетник Н.Н. Сопротивление материалов : лабораторный практикум. Раздел. Кручение. Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2005. - 20 с.
7. Горшков В.Н., Межецкий Г. Д., Решетник Н.Н., Загребин Г.Г. Сопротивление материалов: лабораторный практикум. Раздел. Сдвиг. Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2005. - 16 с.
8. Гресс П.В., Руководство к решению задачи по сопротивлению материалов, учебное пособие, М.: Высшая школа, 2007.- 334с.
9. Дарков А.В. и др. Сопротивление материалов. М: В. Ш., 1989
10. Ивашенцев Г.Д., Васильчиков В.В. Определение упругих постоянных материалов. Методическое руководство к выполнению лабораторных работ по сопротивлению материалов. Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2006.
10. Ицкович Г.М.. руководство к решению задач по сопротивлению материалов, В.Ш., М., 2001.
11. Костенко Н.А., С.В. Балясникова, Ю. Э. Волошановская , Сопротивление материалов (учебное пособие), М.: В. Ш., 2007. - 488с.
12. Курбатова В.Н., Васильчиков В.В. Испытания металлов на усталостную прочность. Методическое руководство к выполнению лабораторных работ по сопротивлению материалов. Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2007.
13. Мельников Б.Е. Сопротивление материалов: учебное пособие. СПб. : Лань, 2003. - 525 с. 15.
14. Межецкий Г. Д., Загребин Г. Г., Решетник Н.Н. Аттестационно-педагогические материалы по сопротивлению материалов. Методические указания. Саратов : ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2011.
12. Межецкий Г. Д., Загребин Г. Г., Решетник Н.Н. Аттестационно-педагогические материалы по сопротивлению материалов. Методические указания. Саратов : ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2007.
13. Межецкий Г. Д., Загребин Г. Г., Решетник Н.Н. Сопротивление материалов . (курс лекций Ч.2). Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2003. - 168 с.
14. Межецкий Г. Д., Загребин Г. Г., Решетник Н.Н. Сопротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2007. - 416 с.
15. Межецкий Г. Д., Загребин Г. Г., Решетник Н.Н. Сопротивление материалов (учебник). М.: Дашков и К, 2010. - 430 с.
16. Г. Д. Межецкий, Г. Г. Загребин, Н. Н. Решетник, А. А. Слепов. « Сопротивление материалов » (учебное пособие). Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2004. - 416 с.

17. Межецкий Г.Д. и другие. Курс лекций по сопротивлению материалов, ч.1, Саратов, СГАУ, 2001.
18. Плотников Н.Д., Скотников Д.А. Сопротивление материалов. Методические указания для самостоятельного изучения дисциплины студентами специальностей 270900-"Технология мяса и мясных продуктов", 271100-"Технология молока и молочных продуктов". Саратов : ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2004. - 8 с.
19. Миролубов И.Н. Сопротивление материалов. Пособие по решению задач (учебник). СПб: Лань, 2009.
20. Решетник Н.Н., Васильчиков В.В. Расчет на устойчивость сжатых стержней на основе комплекса программ. Методическое руководство к выполнению расчетно-графических работ по сопротивлению материалов. Саратов : ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2005.
21. Саргсян А.Е. Сопротивление материалов, теория упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчетов. М: В. Ш., 2000.
22. Степин А.А. Сопротивление материалов. М: В. Ш., 1983.
23. Шихов Ю.М. Сопротивление материалов. Метод. указания для самостоятельного изучения дисциплины по специальности 271200-"Технология продуктов общественного питания". Саратов.: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2004. - 8 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	2
Лекция 1. Основные понятия и определения. Метод сечений. Напряжения и деформации.....	3
1.1. Наука о сопротивлении материалов.....	3
1.2. Основные гипотезы сопротивления материалов.....	3
1.3. Изучаемые объекты и классификация нагрузок.....	4
1.4. Метод сечений.....	6
1.5. Напряжения и деформации.....	6
Вопросы для самоконтроля.....	7
Литература.....	7
Лекция 2. Осевое растяжение (сжатие). Внутренние усилия, напряжения, деформации, расчет на прочность.....	8
2.1. Понятие осевого растяжения (сжатия). Внутренние усилия.....	8
2.2. Нормальные напряжения в сечениях бруса при растяжении (сжатии).....	9
2.3. Деформации. Закон Гука.....	9
2.4. Расчет на прочность.....	10
Вопросы для самоконтроля.....	11
Литература.....	11
Лекция 3. Механические испытания материалов.....	12
3.1. Диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали.....	12
3.2. Механические характеристики материала.....	13
3.3. Диаграмма напряжений пластичных материалов, не имеющих площадки текучести.....	14
Вопросы для самоконтроля.....	15
Литература.....	15
Лекция 4. Геометрические характеристики плоских сечений.....	16
4.1. Понятие геометрических характеристик плоских сечений. Их свойства.....	16
4.2. Моменты инерции простых и сложных фигур.....	17
4.3. Зависимости между моментами инерции при параллельном переносе и повороте осей.....	18
4.4. Положение главных осей инерции и главные моменты инерции.....	19
Вопросы для самоконтроля.....	19
Литература.....	19
Лекция 5. Напряженное состояние в точке тела.....	20
5.1. Напряженное состояние в точке тела, виды напряженных состояний.....	20
5.2. Линейное напряженное состояние.....	21
5.3. Плоское напряженное состояние.....	23
Вопросы для самоконтроля.....	24
Литература.....	24
Лекция 6. Сдвиг. Чистый сдвиг.....	25
6.1. Сдвиг. Внутренние усилия и напряжения в поперечных сечениях бруса.....	25
6.2. Чистый сдвиг. Напряжения на наклонных площадках, главные напряжения.....	25
6.3. Деформации при чистом сдвиге. Закон Гука при сдвиге.....	26
6.4. Расчет на прочность.....	27
Вопросы для самоконтроля.....	27
Литература.....	27
Лекция 7. Кручение брусьев круглого поперечного сечения.....	29

7.1. Основные понятия. Внутренние усилия в сечениях вала.....	29
7.2. Экспериментальная картина деформации круглого вала при кручении.....	30
7.3. Напряжения в поперечных сечениях вала при кручении. Изменение напряжений по сечению вала.....	31
7.4. Деформация вала при кручении.....	32
7.5. Расчет вала на прочность и жесткость при кручении.....	32
Вопросы для самоконтроля.....	33
Литература.....	33
Лекция 8 Прямой изгиб. Внутренние усилия при изгибе. Дифференциальные зависимости между усилиями при изгибе.....	34
8.1. Основные понятия. Определение опорных реакций.....	34
8.2. Внутренние усилия в поперечных сечениях балки при изгибе. Правило знаков внутренних усилий.....	36
8.3. Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки.....	37
Вопросы для самоконтроля.....	37
Литература.....	39
Лекция 9. Построение эпюр внутренних усилий. Контроль эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.....	40
9.1. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов в простейших балках.....	40
9.2. Контроль правильности построения эпюр Q и M.....	41
Вопросы для самоконтроля.....	42
Литература.....	42
Лекция 10. Нормальные напряжения при прямом изгибе.....	44
10.1. Экспериментальное изучение работы материала при чистом изгибе.....	44
10.2. Нормальные напряжения при чистом изгибе. Изменение нормальных напряжений по высоте поперечного сечения.....	45
10.3. Расчет на прочность при изгибе по нормальным напряжениям.....	46
Вопросы для самоконтроля.....	46
Литература.....	46
Лекция 11. Касательные напряжения при поперечном изгибе.....	47
11.1. Экспериментальное изучение работы материала при поперечном изгибе.....	47
11.2. Касательные напряжения в сечениях балки при изгибе. Изменение касательных напряжений по высоте поперечного сечения.....	47
11.3. Расчет на прочность по касательным напряжениям.....	49
Вопросы для самоконтроля.....	50
Литература.....	50
Лекция 12. Перемещения в балках при прямом изгибе.....	51
12.1. Линейные и угловые перемещения в балках при прямом изгибе.....	51
12.2. Дифференциальное уравнение упругой линии балки.....	52
Вопросы для самоконтроля.....	54
Литература.....	54
Лекция 13.Сложное сопротивление. Косой изгиб.....	55
13.1. Понятие сложного сопротивления.....	55
13.2. Косой изгиб. Внутренние усилия и напряжения.....	55
13.3. Нулевая линия ее положение и свойства.....	56
13.4. Расчет на прочность, деформации при косом изгибе.....	57

Вопросы для самоконтроля.....	58
Литература.....	58
Лекция 14. Изгиб с кручением брусьев круглого поперечного сечения.....	60
14.1. Основные теории прочности.....	60
14.2. Изгиб с кручением. Основные понятия и внутренние усилия в сечениях вала.....	60
14.3. Расчет вала на прочность.....	61
Вопросы для самоконтроля.....	63
Литература.....	63
Лекция 15. Внецентренное растяжение (сжатие) прямого бруса (ВРС).....	64
15.1. Основные понятия внецентренного растяжения (сжатия).....	64
15.2. Внутренние усилия и напряжения при внецентренном растяжении (сжатии).....	64
15.3. Нейтральная (нулевая) линия ее положение и свойства.....	65
15.4. Расчет на прочность.....	66
15.5. Ядро сечения. Методика построения ядра сечения.....	66
15.6. Примеры расчет ядра сечения.....	67
Вопросы для самоконтроля.....	68
Литература.....	68
Лекция 16. Продольный изгиб.....	70
16.1. Основные понятия продольного изгиба. Формула Эйлера для определения критической силы.....	70
16.2. Влияние способов закрепления концов стержня на величину критической силы.....	71
16.3. Критические напряжения. Условие применимости формулы Эйлера. Формула Ясинского.....	72
16.4. Проверка сжатых стержней на устойчивость.....	73
Вопросы для самоконтроля.....	73
Литература.....	74
Лекция 17. Динамические нагрузки.....	75
17.1. Основные понятия.....	75
17.2. Определение динамического коэффициента при движении с ускорением.....	75
17.3. Ударная нагрузка. Определение динамического коэффициента без учета массы упругой системы.....	77
17.4. Оценка прочности при динамической нагрузке.....	79
Вопросы для самоконтроля.....	79
Литература.....	79
Библиографический список.....	80
Содержание.....	82