Приложение 3.1

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский государственный аграрный университет имени Н. И. Вавилова»

МЕХАНИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

«АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

краткий курс лекций

для студентов II курса

Направление подготовки

20.03.02 Природообустройство и водопользование

Саратов 2016

УДК 531.1
ББК 22.21
М25

Рецензенты:

Доцент кафедры «Теоретическая и прикладная механика», кандидат технических наук, доцент «Поволжского филиала Московского государственного университета путей сообщения» *А.П. Маштаков*

Доцент кафедры «Детали машин, подъемно-транспортные машины и сопротивление материалов», кандидат технических наук, доцент ФГБОУ ВПО «Саратовский ГАУ» *В.В. Криловецкий*

П38 **Механика. Теоретическая механика**: краткий курс лекций для студентов II курса направление подготовки 20.03.02 «Природообустройство и водопользование» / Сост.: М.Г. Загоруйко, А.М. Марадудин, А.В. Перетятько, А.А. Леонтьев // ФГОУ ВО «Саратовский ГАУ». – Саратов, 2016. – 48 с.

Краткий курс лекций по дисциплине «Механика. Теоретическая механика» составлен в соответствии с рабочей программой дисциплины и предназначен для студентов направления подготовки 20.03.02 «Природообустройство и водопользование». Содержит основные сведения по разделам теоретической механики «Аналитическая механика». Направлен на формирование у студентов профессиональных компетенций, необходимых для эффективного использования основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности при решении различных инженерных задач.

УДК 531.1
ББК 22.21

Введение

Аналитическая механика – это наука, которая устанавливает общие, единые методы изучения движения и равновесия, применяемые для всех механических систем. Эти методы представляют собой исследования средствами математического анализа всех возможных движений механических систем. При этом выводятся уравнения движения одной и той же структурной формы, не зависимой от вида механической системы и условий ее движения.

На материале курса аналитической механики базируются такие важные для общего инженерного образования дисциплины, как «Механика. Сопротивление материалов», «Теоретические основы водопользования» и др., а также большое число специальных инженерных дисциплин, посвящённых изучению движения как отдельных механизмов, так и машин в целом, а также разработке методов расчёта и эксплуатации таких объектов, как промышленные и гражданские здания, мосты, тоннели, плотины, водоводы, трубопроводы и многое другое.

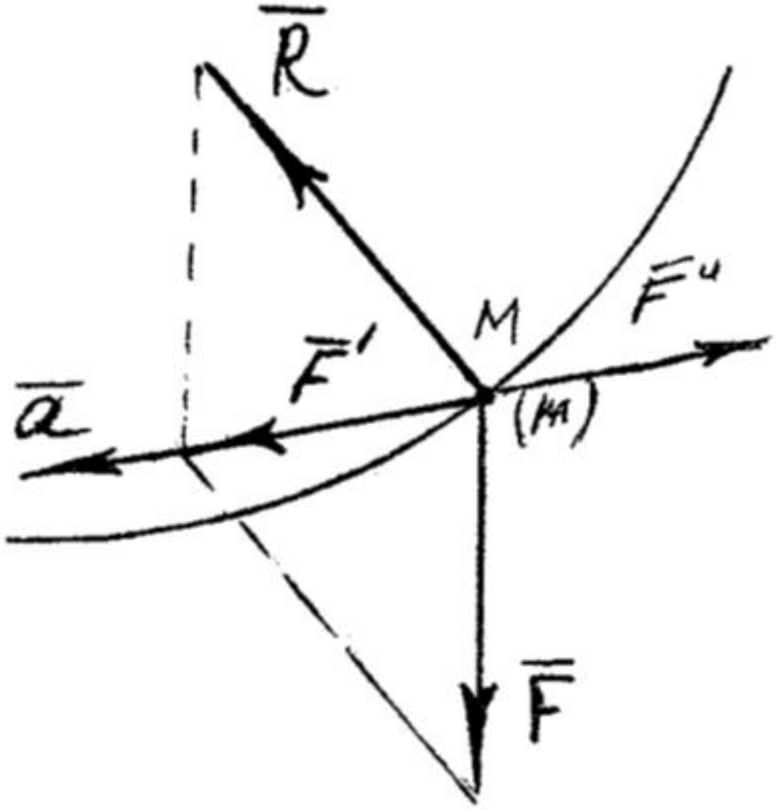
Краткий курс лекций по дисциплине «Аналитическая механика» предназначен для студентов по направлению подготовки 20.03.02 «Природообустройство и водопользование».

Курс нацелен на формирование у студентов профессиональных компетенций, необходимых для эффективного использования основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности при решении различных инженерных задач.

Лекция 1

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

1.1. Принцип Даламбера для материальной точки



Рассмотрим движущуюся несвободную материальную точку, на которую действуют активная сила F и реакция связи R. Определим равнодействующую этих сил:

$$F'=F+R \qquad (1.1)$$

С другой стороны, согласно основному уравнению динамики, $F'=$ m$\cdot a$, уравнение (1.1) можно записать в следующем виде: $F+R-$ m$\cdot a$ $=0$

Введем в рассмотрение силу инерции $F^u=-$ m$\cdot a$, тогда

$$\boxed{F+R+F^u=0} \qquad (1.2)$$

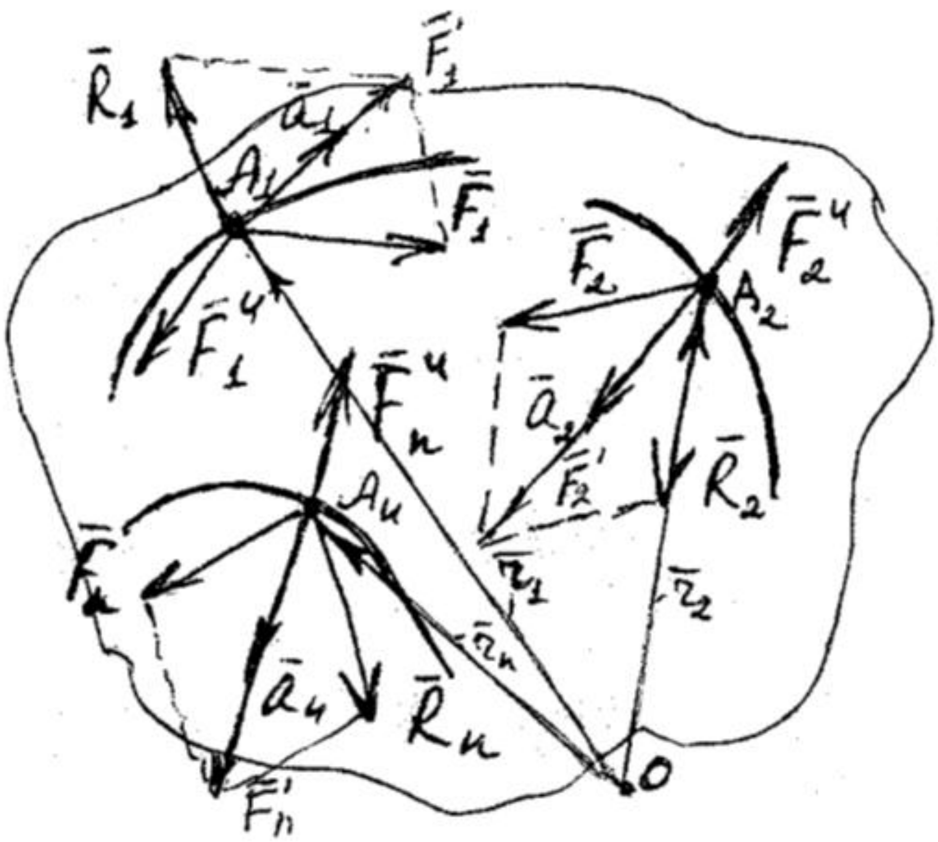
Это и есть принцип Даламбера для материальной точки.

<u>В любой момент движения материальной точки геометрическая сумма всех сил: активной силы, силы реакций связей, действующих на точку, и сила инерции этой точки – равна 0.</u>

Согласно принципу Даламбера, к движущейся материальной точке, на которую действуют активные и реактивные силы, необходимо условно приложить ее силу инерции. После этого наступит состояние условного равновесия этой точки, для которой будут справедливы все уравнения статики. Раздел механики, в котором непосредственно учитывается действие сил инерции, называется **<u>кинетостатической,</u>** а соответствующие расчеты **<u>кинетостатическими.</u>**

При решении задач, на практике, с помощью принципа Даламбера, необходимо векторное равенство (1.2) проецировать на предварительно выбранную систему координат.

1.2. Принцип Даламбера для механической системы.



Рассмотрим механическую систему, состоящую из материальных точек A_1, A_2, …,A_n. Применим к каждой точке принцип Даламбера.

$$+\quad F_1 + R_1 + F_1^U = 0$$
$$F_2 + R_2 + F_2^U = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+\quad F_n + R_n + F_n^U = 0$$

Просуммируем почленно эти равенства:

$\boxed{\Sigma F_i + \Sigma R_i + \Sigma F_i^U = 0}$ (1.3) - принцип Даламбера для механической системы.

В любой момент движения механической системы геометрическая сумма всех активных сил, сил реакций связей и сил инерций всех материальных точек системы равна нулю.

Умножая правую и левую части уравнения (1.3) на r_i, получим:

$r_i \cdot (\Sigma F_i + \Sigma R_i + \Sigma F_i^U) = 0$

Или $r_i \cdot \Sigma F_i + r_i \cdot \Sigma R_i + r_i \cdot \Sigma F_i^U = 0$

Или $\Sigma(r_i \cdot F_i) + \Sigma(r_i \cdot R_i) + \Sigma(r_i \cdot F_i^U) = 0$

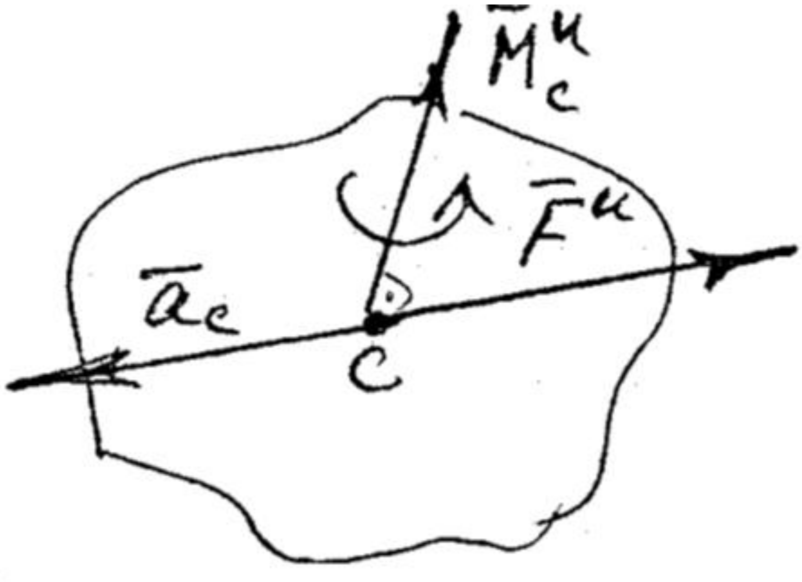
Окончательно $\boxed{\Sigma m_0\ F_i\ + \Sigma m_0\ R_i\ + \Sigma m_0\ F_i^U\ = 0}$

В любой момент движения механической системы геометрическая сумма моментов всех активных сил, сил реакций связей и сил инерций всех материальных точек системы относительно любого центра равна нулю.

1.3. Приведение сил инерции точек твердого тела к простейшему виду.

Из статики известно, что любую систему сил можно привести к произвольно выбранному центру, пользуясь методом Пуансо. Пользуясь этим методом, можно к некоторому центру привести и систему сил инерции точек твердого тела. В этом случае за центр приведения берут Ц. М. тела. В результате приведения сил инерции точек движущегося твердого тела в общем случае получается одна сила, которая называется **главным вектором сил инерции** и одна пара сил, момент которой называется **главным моментом сил инерции.**

Главный вектор сил инерции точек движущегося тела всегда приложен в центре масс тела и равен по модулю произведению массы тела на ускорение центра масс тела и направлен противоположно вектору ускорения центра масс твердого тела.



F^u=M$\cdot a_c$,

F^u= - M$\cdot a_c$,

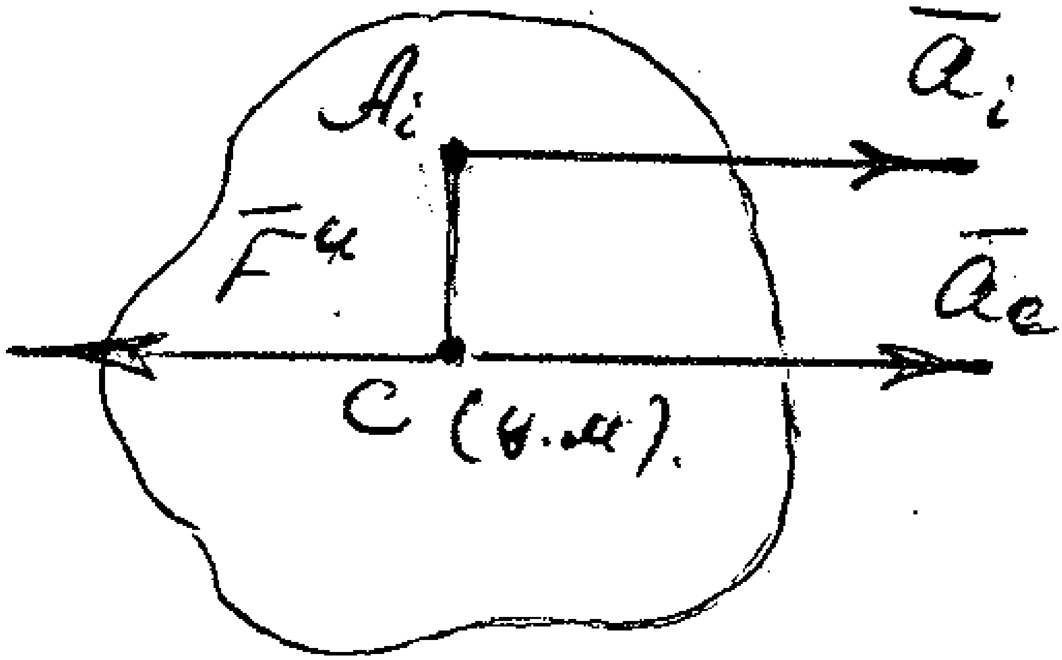
F^u=ΣF_i^u .

Главный момент сил инерции точек движущегося твердого тела относительно центра масс тела равен геометрической сумме моментов всех сил инерции точек этого тела относительно того же центра. Т. е.:

$$\boxed{M_c^u = \Sigma m_c\ F_i^u\ \ =\ -\Sigma r_i \cdot m_i \cdot a_i}$$

1.4. Частные случаи приведения сил инерции точек твердого тела.

1.4.1. Поступательное движение.

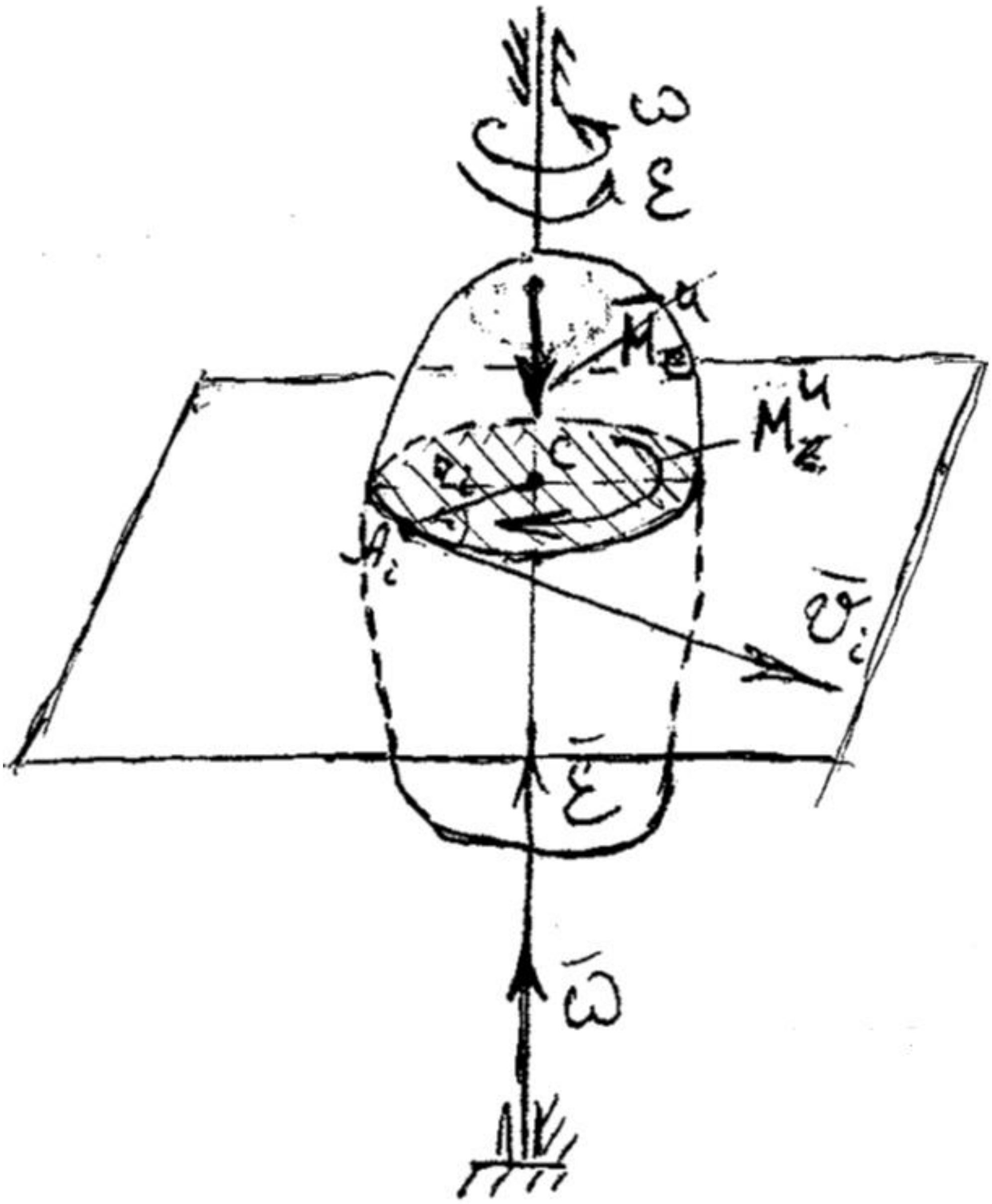


В этом случае для любой точки a_i=a_c, т. е. ускорение любой точки совпадает по модулю и направлению с ускорением центра масс (Ц.М.).

При этом ε=0, тогда M_c^u=0, а F^u= - M$\cdot a_c$. Следовательно, в случае поступательного движения твердого тела силы инерции всех его точек приводятся к одной равнодействующей силе F^u, приложенной к Ц.М. тела и равной по модулю произведению массы тела на ускорение его Ц.М., а по направлению – противоположно этому ускорению.

1.4.2. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс тела.

Пусть твердое тело имеет плоскость материальной симметрии через Ц. М. тела – точку С.



В этом случае F^u=0, т. к. a_c=0.

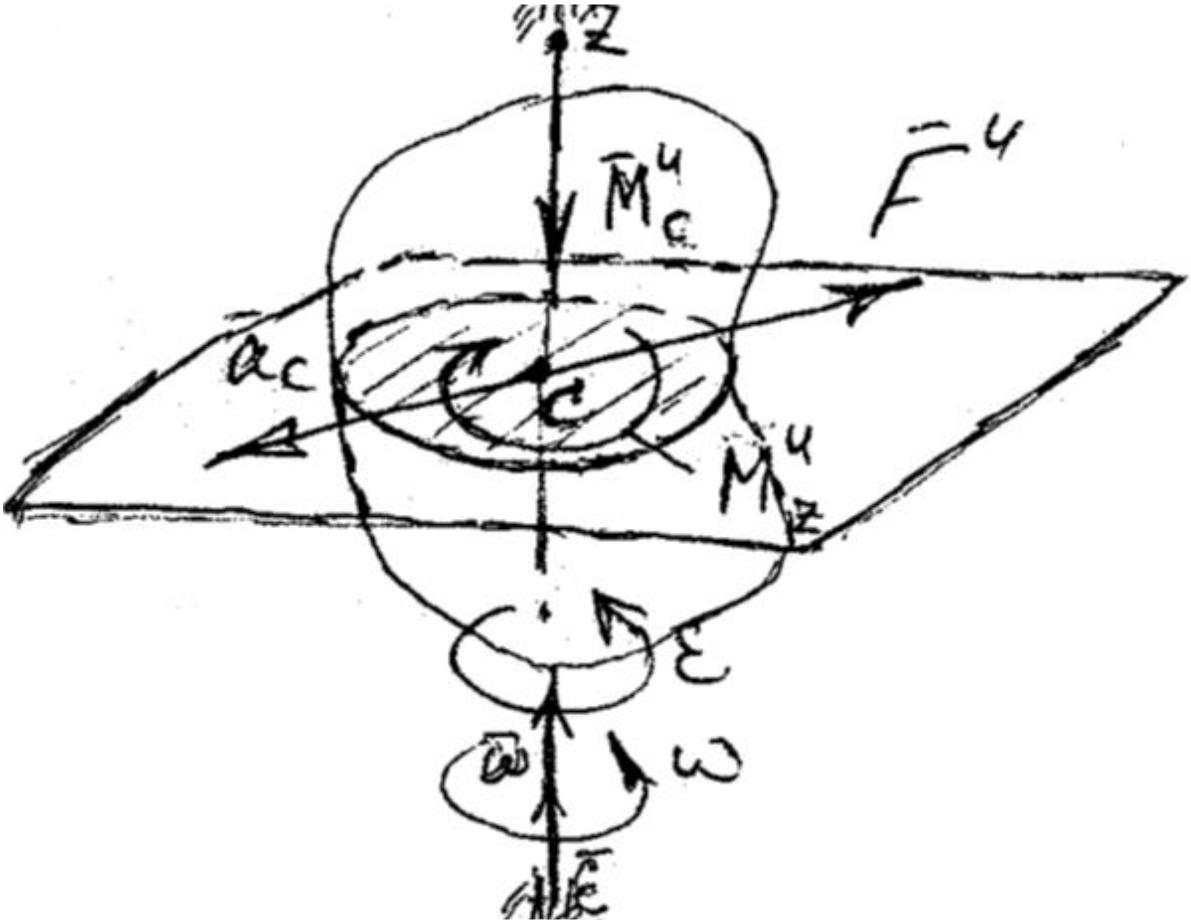
M_c^u= - J_c·ε

$\boxed{M_z^u = -J_z \cdot \varepsilon}$ – главный момент (по направлению) сил инерции.

$\boxed{M_z^u = J_c \cdot \varepsilon}$ - по модулю.

Таким образом, в случае вращательного движения твердого тела, силы инерции его точек приводятся к одной паре сил, момент которой равен произведению момента инерции этого тела относительно оси вращения на угловое ускорение тела. По направлению главный момент сил инерции противоположен угловому ускорению тела.

1.4.3. Плоское движение твердого тела.



Пусть тело имеет плоскость материальной симметрии и движется параллельно ей.

Тогда Ц. М. тела – точка С, а также главный вектор сил инерции F^u и результирующая пара сил инерции с моментом M_z^u будут лежать в плоскости симметрии и определяться по формулам:

$\boldsymbol{F^u}$= - **M**·$\boldsymbol{a_c}$, $\boldsymbol{M_z^u = -J_z \cdot \varepsilon}$

То есть в случае плоского движения твердого тела, силы инерции его точек приводятся к главному вектору и главному моменту сил инерции точек этого тела.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается сущность принципа Даламбера для материальной точки и механической системы?
2. Какому условию удовлетворяет в любой момент времени геометрическая сумма главных моментов внешних задаваемых сил, реакций связей и сил инерции точек несвободной механической системы?
3. Чему равен модуль и какое направление имеет главный вектор сил инерции механической системы?
4. К чему приводятся силы инерции точек твердого тела (механической системы) при его поступательном движении; при его вращении вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс тела; при его плоском движении?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
2. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.
3. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике [Текст]: Учебное пособие / И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
4. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная

1. **Бутенин, Н.В.** Введение в аналитическую механику [Текст]: Учеб. пособие для вузов / Н. В. Бутенин, Н. А. Фуфаев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1991. – 256 с.: ил.; 22 см. – 11750 экз. – ISBN 5-02-014221-2.
2. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
3. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. – Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
4. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.

Лекция 2

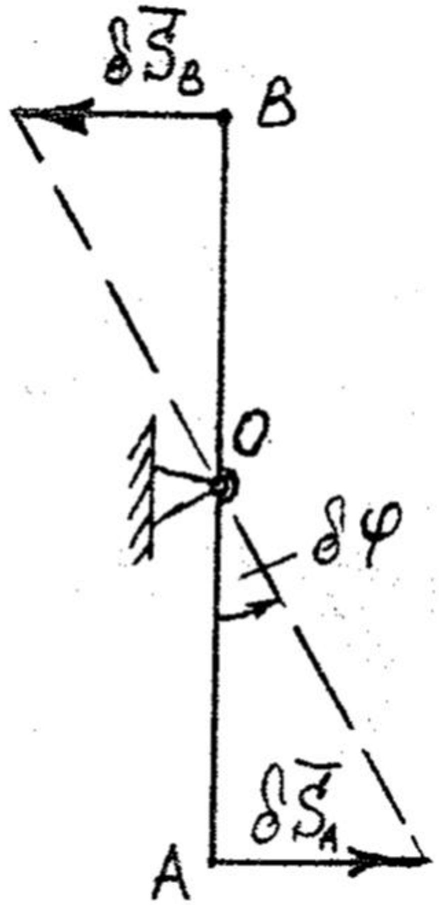
ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

2.1. Возможные перемещения системы

Возможными (виртуальными) перемещениями механической системы называются воображаемые, бесконечно малые перемещения точек системы, допускаемые в данный момент связями, наложенными на систему.

Возможное перемещение любой точки системы изображается элементарным вектором δS, направленным в сторону перемещения.

δS_Aи δS_B – возможные перемещения точек A и B.



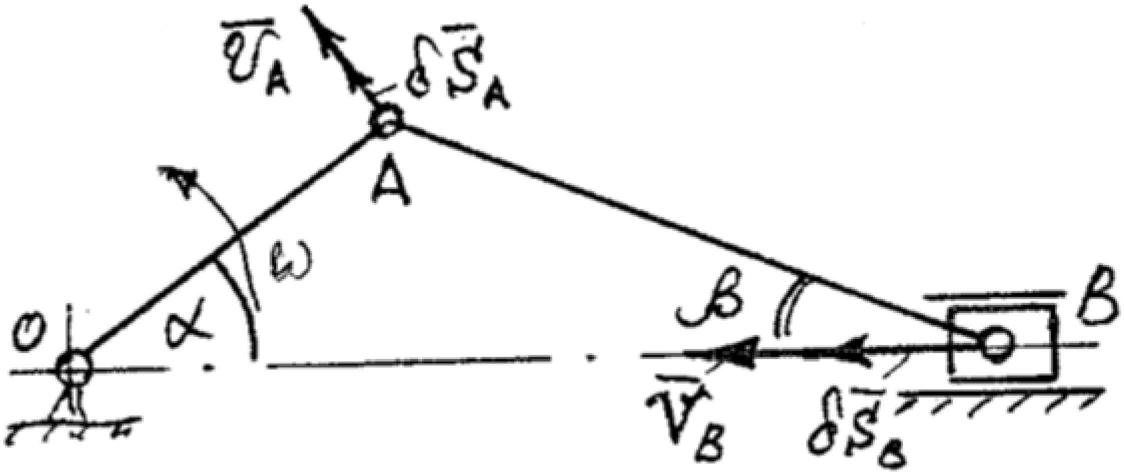
Из чертежа следует, что δS_A=OA·$\tan\delta\varphi$

δS_B=OB·$\tan\delta\varphi$

Тогда $\frac{\delta S_A}{\delta S_B}=\frac{OA}{OB}$ $\delta S_B=\frac{\delta S_A \cdot OB}{OA}$

Т. о. возможные перемещения можно выражать одно через другое.

Рассмотрим возможные перемещения точек кривошипно-шатунного механизма.



Из кинематики известно, что $\text{пр}_{AB}V_B$=$\text{пр}_{AB}V_A$.

Умножим обе части этого равенства на бесконечно малый промежуток времени Δt: $\text{пр}_{AB}V_B \cdot \Delta t = \text{пр}_{AB}V_A \cdot \Delta t$.

Тогда, учитывая, что $V_B \cdot \Delta t = \delta S_B$, $V_A \cdot \Delta t = \delta S_A$,

получим теорему о проекциях возможных перемещений точек плоской фигуры на прямую, проходящую через эти точки:

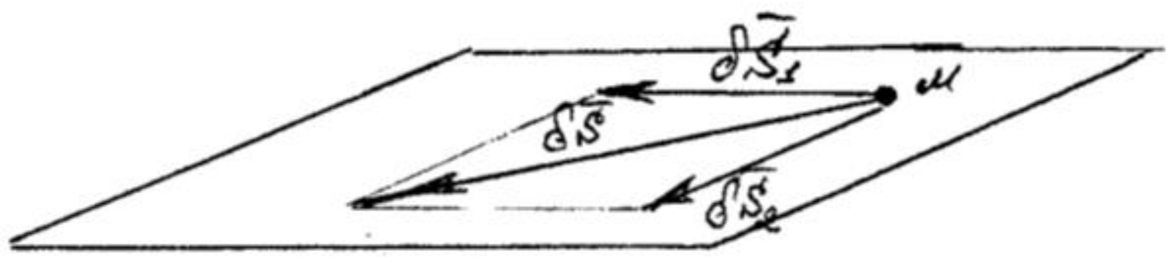
$$\boxed{\text{пр}_{AB} \cdot \delta S_B = \text{пр}_{AB} \cdot \delta S_A}$$

Проекции возможных перемещений точек плоской фигуры на прямую, проходящую через эти точки, равны.

Замечание. Возможные перемещения точек механической системы, не зависят ни от величины, ни от направления сил, действующих на систему, а зависят только от связей, наложенных на систему.

2.2. Число степеней свободы

В общем случае для точек и тел системы может существовать множество различных возможных перемещений. Однако, для каждой системы, в зависимости от характера наложенных на нее связей, можно указать определенное число таких независимых между собой перемещений, что всякое другое возможное перемещение будет получаться как их геометрическая сумма. Например, шарик на плоскости.



$\delta S = \delta S_1 + \delta S_2$

Число независимых между собой возможных перемещений системы называется **<u>числом степеней свободы этой системы.</u>**

Так в нашем примере шарик имеет 2 степени свободы. У к. ш. м., очевидно, одна степень свободы. У свободной материальной точки-3 степени свободы (3 независимых перемещения вдоль взаимно $\perp$ осей).

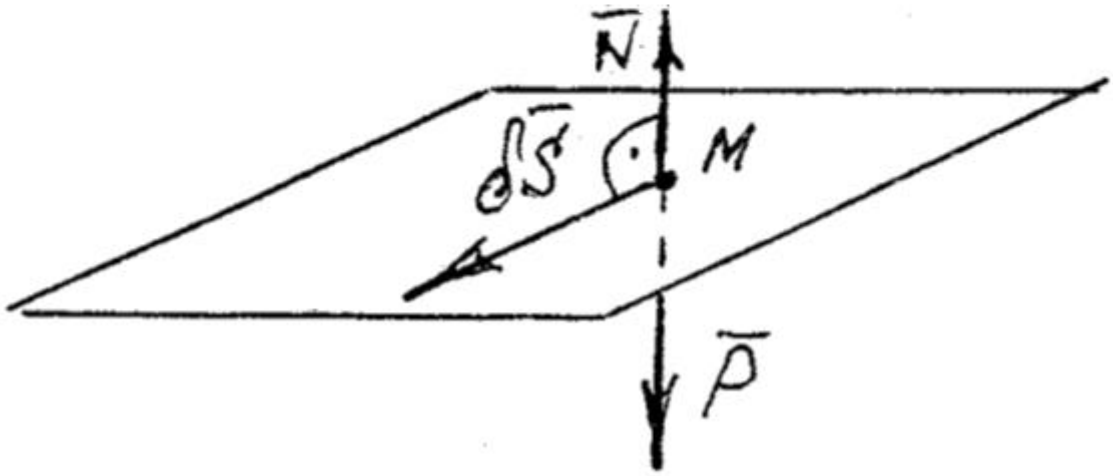
Свободное твердое тело имеет 6 степеней свободы. При этом, независимыми перемешениями будут: 3 поступательных перемещения вдоль осей координат и 3 вращательных – вокруг этих осей.

2.3. Понятие об идеальных связях.

Связи, наложенные на механическую систему, называются **<u>идеальными</u>**, если сумма элементарных работ реакций этих связей на любом возможном перемешении системы равно нулю, т. е.

$\Sigma\ \delta A_{Ri} = \Sigma\ \delta R_i \cdot \delta S_i \cdot \cos(R_i; \delta S_i) = 0$

Примеры: 1) *Абсолютно гладкая опорная поверхность.*



М- материальная точка, находящаяся на гладкой поверхности, Р- сила тяжести, N- нормальная реакция, δS - возможное перемещение. В этом случае $\Sigma\ \delta A_{Ri} = \mathrm{N}\cdot\delta\mathrm{S}\cdot\cos(N; \delta S) = \mathrm{N}\cdot\delta\mathrm{S}\cdot\cos 90° = 0$.

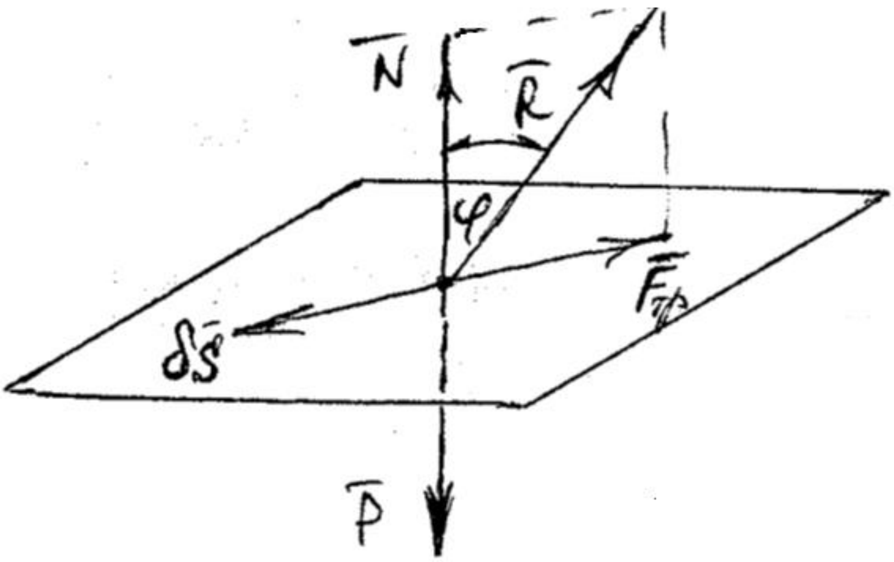
Т. о. поверхность без трения является идеальной связью.

2) *Шероховатая опорная поверхность.*

В этом случае полная реакция опорной поверхности отклоняется от нормали на угол φ, т. е. на точку кроме нормальной реакции действует еще одна сила трения. В этом случае:

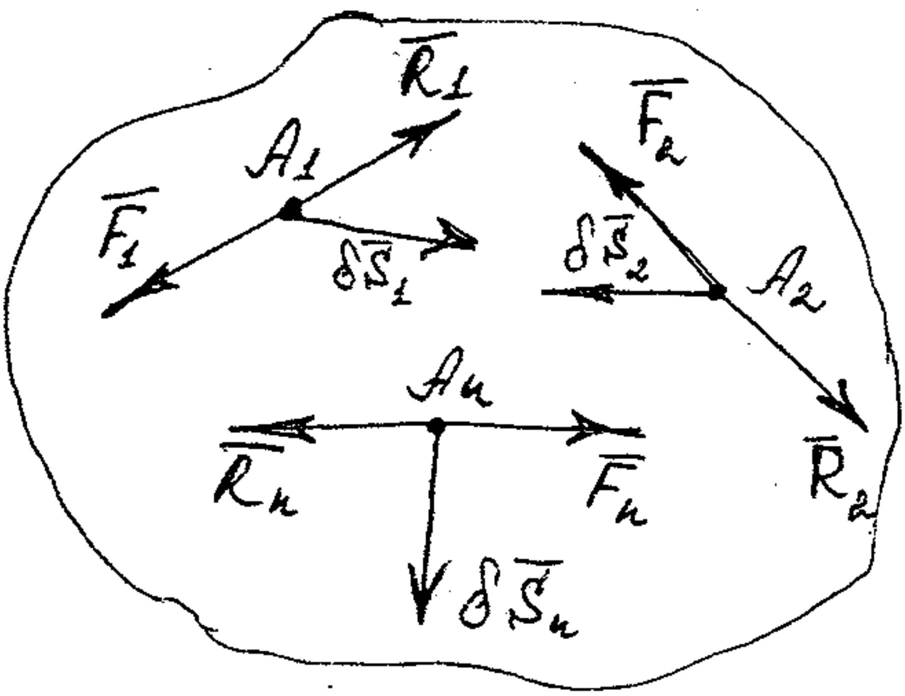
$\Sigma\ \delta A_{Ri} = \mathrm{N}\cdot\delta\mathrm{S}\cdot\cos 90° + F_{\text{тр}}\cdot\delta\mathrm{S}\cdot\cos 180° \neq 0,$

$\cos 90° = 0 \qquad \delta\mathrm{S} \neq 0$



Однако, любую связь можно считать идеальной, если возникающие силы трения перевести из группы реакций связей в группу активных (задаваемых) сил.

2.4. Принцип возможных перемещений



Пусть механическая система с «идеальными связями» находится в состоянии покоя, тогда для каждой точки системы:

$F_1+R_1=0$

$F_2+R_2=0$

……………..

$F_n+R_n=0$

Дадим системе возможное перемещение. При этом, каждая точка системы получит свое возможное перемещение. Тогда, согласно теореме о работе равнодействующей силы: « Работа равнодействующей силы на некотором перемещении равна алгебраической сумме работ слагаемых сил на том же перемещении», будем иметь:

$$
+\quad
\begin{array}{l}
F_1 \cdot \delta S_1 \cdot \cos(F_1; \delta S_1) + R_1 \cdot \delta S_1 \cdot \cos(R_1; \delta S_1) = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
F_n \cdot \delta S_n \cdot \cos(F_n; \delta S_n) + R_n \cdot \delta S_n \cdot \cos(R_n; \delta S_n) = 0
\end{array}
$$

$$\Sigma F_i \cdot \delta S_i \cdot \cos(F_i; \delta S_i) + \Sigma R_i \cdot \delta S_i \cdot \cos(R_i; \delta S_i) = 0,$$

$$\Sigma R_i \cdot \delta S_i \cdot \cos(R_i; \delta S_i) = 0$$

Поскольку система с идеальными связями, то второе слагаемое равно нулю. Тогда

$$\boxed{\Sigma F_i \cdot \delta S_i \cdot \cos(F_i; \delta S_i) = 0} \qquad (1)$$

Уравнение (1) и есть принцип возможных перемещений.

Для того, чтобы механическая система с идеальными связями находилась в состоянии покоя, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма элементарных работ всех заданных (активных) сил, действующих на систему на любом ее возможном перемещении, равнялась нулю.

2.5. Методика решения задач на принцип возможных перемещений

1) Изображают все действующие на систему активные силы.

2) Сообщают системе возможное перемещение и показывают на чертеже векторы δS_i возможных перемещений точек системы или угол поворота $\delta\varphi$.

3) Записывают принцип возможных перемещений и подсчитывают элементарные работы активных сил на возможных перемещениях точек приложения этих сил.

4) Записывают принцип возможных перемещений:

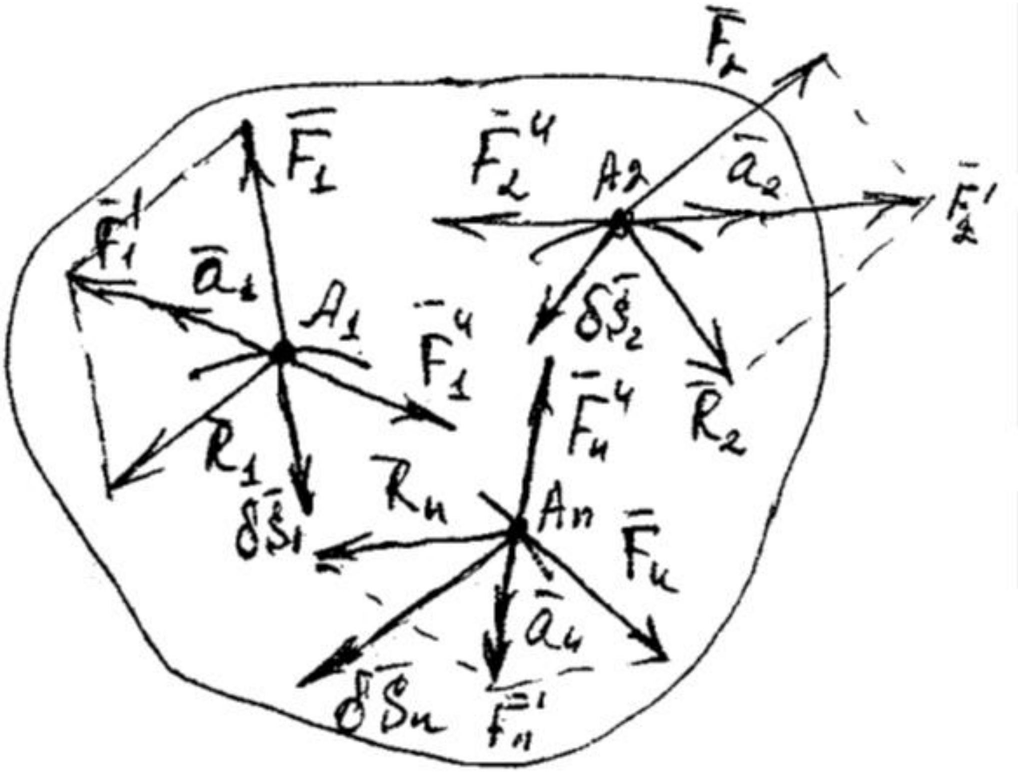
$\Sigma F_i \cdot \delta S_i \cdot \cos(F_i; \delta S_i) = 0$.

5) Выражают все возможные перемещения δS_i через какое-нибудь одно возможное перемещение.

6) Подставляют полученные выражения возможных перемещений в принцип возможных перемещений и находят искомую величину, которую требуется определить в данной задаче.

2.6. Общее уравнение динамики системы

Пусть механическая система с идеальными связями, состоящая из материальных точек $A_1, A_2, \dots, A_n$, находится в состоянии движения.



Применим к каждой точке системы принцип Даламбера.

$F_1 + R_1 + F_1^U = 0$

$F_2 + R_2 + F_2^U = 0$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$F_n + R_n + F_n^U = 0$

Дадим системе возможные перемещения и воспользуемся теоремой о работе равнодействующей силы.

$$F_1 \cdot \ \delta S_1 \cdot \cos(F_1; \delta S_1\ ) + R_1 \cdot \delta S_1 \cdot \cos(R_1; \delta S_1\ ) + F_1^U \cdot \delta S_1 \cdot \cos(F_1^U; \delta S_1\ ) = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F_n \cdot \ \delta S_n \cdot \cos(F_n; \delta S_n\ ) + R_n \cdot \delta S_n \cdot \cos(R_n; \delta S_n\ ) + F_n^U \cdot \delta S_n \cdot \cos(F_n^U; \delta S_n\ ) = 0$$

$$\Sigma F_i \cdot \ \delta S_i \cdot \cos(F_i; \delta S_i\ ) + \Sigma R_i \cdot \delta S_i \cdot \cos(R_i; \delta S_i\ ) + \Sigma F_i^U \cdot \delta S_i \cdot \cos(F_i^U; \delta S_i\ ) = 0$$

$$\Sigma R_i \cdot \delta S_i \cdot \cos(R_i; \delta S_i\ ) = 0$$

Т. к. механическая система с идеальными связями, то вторая сумма равна нулю.

$$\boxed{\Sigma F_i \cdot \ \delta S_i \cdot \cos(F_i; \delta S_i\ ) + \Sigma F_i^U \cdot \delta S_i \cdot \cos(F_i^U; \delta S_i\ ) = 0}$$

<u>Данное выражение является общим уравнением динамики системы.</u>

В любой момент движения механической системы с идеальными связями алгебраическая сумма элементарных работ всех заданных (активных) сил, действующих на систему, и сил инерций всех точек этой системы на любом ее возможном перемещении равна нулю.

Методика решения задач ничем не отличается от методики решения задач на принцип возможного перемещения.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют возможными перемещениями механической системы? От чего они зависят?
2. Что называется числом степеней свободы материального тела? Приведите примеры.
3. Чем идеальные связи отличаются от неидеальных?
4. Какой вид имеет принцип возможных перемещений?
5. Какое условие должно выполняться для рассмотрения неидеальной связи в качестве идеальной?
6. Какой вид имеет общее уравнение динамики системы?
7. По какой методике решаются задачи на принцип возможного перемещения и общее уравнение динамики системы?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
2. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.
3. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике [Текст]: Учебное пособие / И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
4. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная

1. **Бутенин, Н.В.** Введение в аналитическую механику [Текст]: Учеб. пособие для вузов / Н. В. Бутенин, Н. А. Фуфаев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1991. – 256 с.: ил.; 22 см. – 11750 экз. – ISBN 5-02-014221-2.
2. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
3. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. – Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
4. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.

Лекция 3

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА II РОДА (ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ)

3.1. Обобщенные координаты

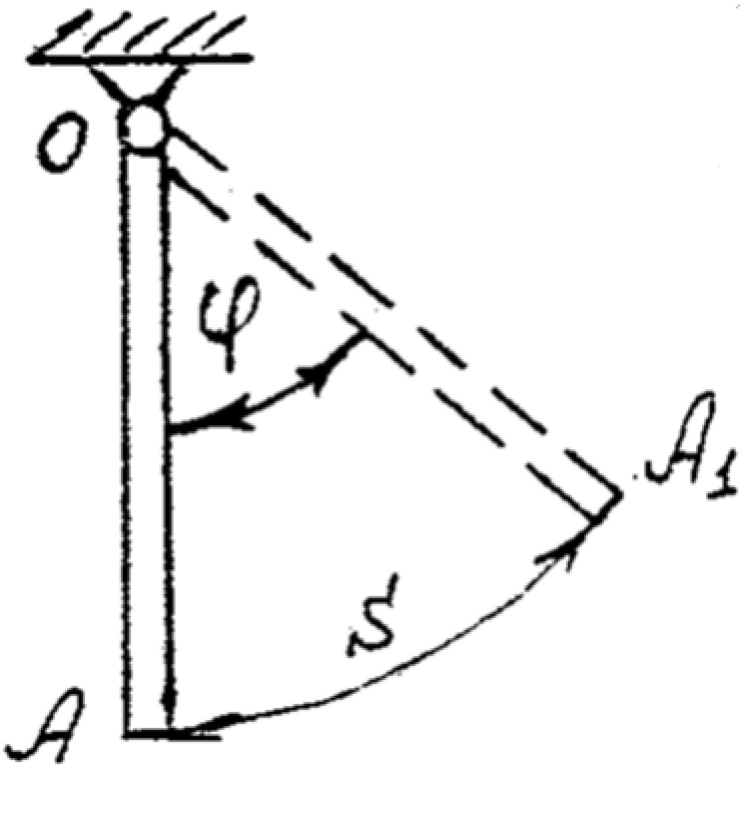
Обобщенными координатами называются независимые друг от друга параметры (величины), однозначно определяющие положение всех точек механической системы по отношению к выбранной системе отсчета в любой момент времени. Очевидно, число обобщенных координат определяет число степеней свободы механической системы с идеальными связями.

Условимся обозначать обобщенные координаты буквами $q_1, q_2, \ldots, q_s$.

Также очевидно, что в общем случае обобщенные координаты могут иметь различный геометрический и механический смысл. Ими могут быть линейные и угловые величины, а также параметры, имеющие размерность площади, объема и т. п.

Примеры:

1) Математический маятник. Степень свободы w=1

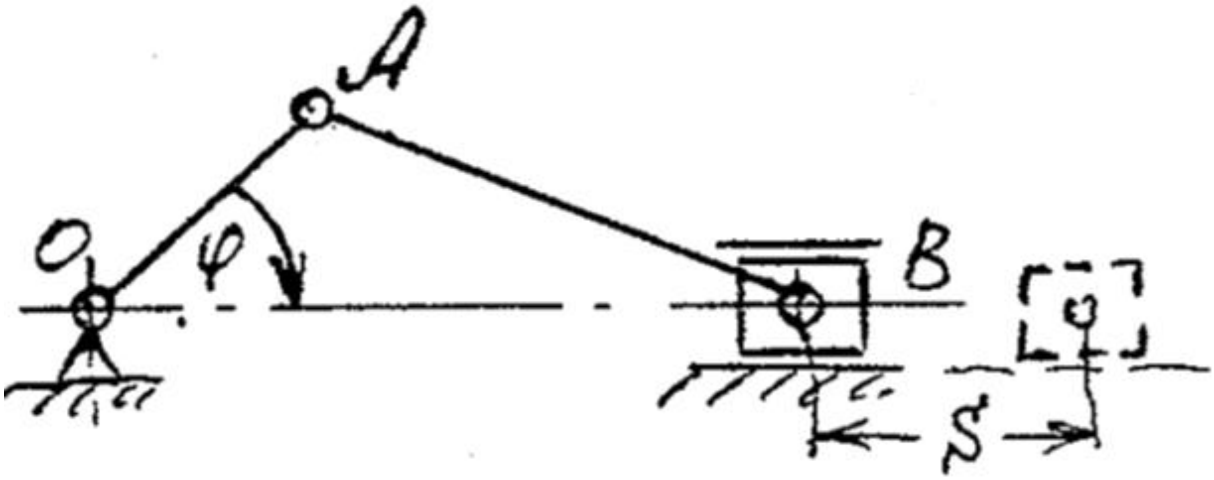


q=S (q = м)

q=φ (q = рад)

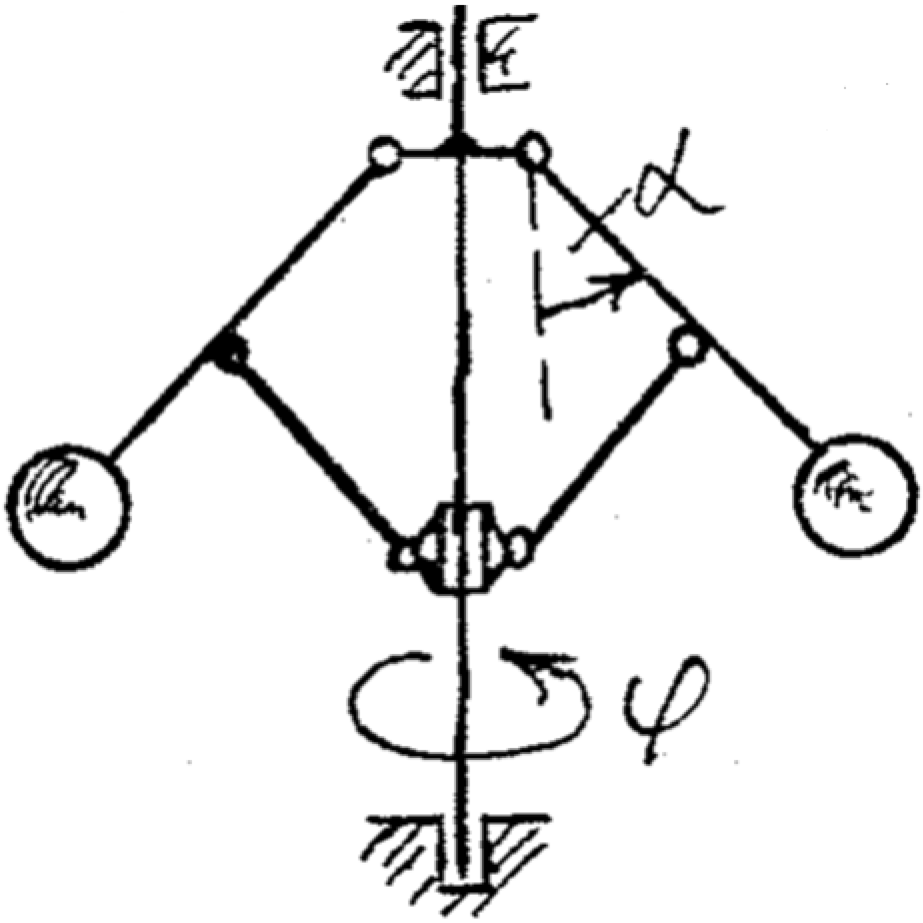
q=S_{OAA} (q = м^2)

2) Кривошипно-шатунный механизм. Степень свободы w=1



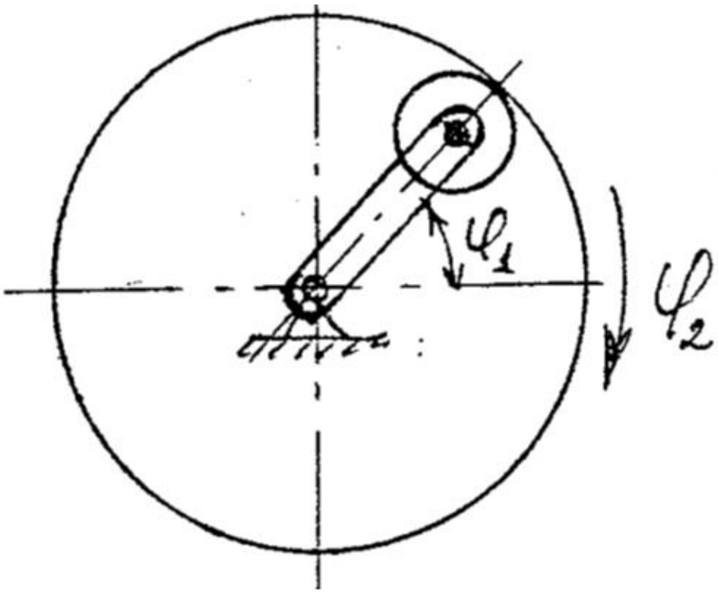
q=φ (q = рад)
q=S (q = м)

3) Регулятор или центробежный механизм. Степень свободы w=2



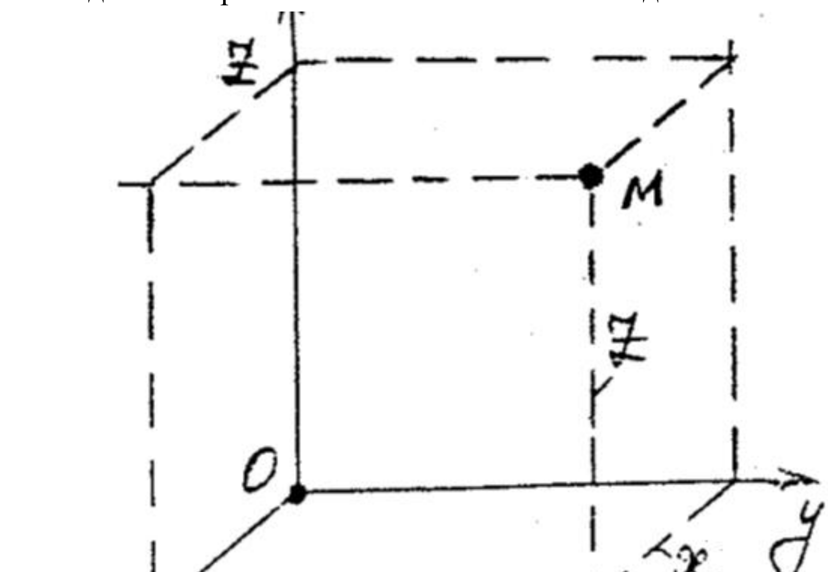
q_1=φ
q_2=α

4) Дифференциальный механизм. Степень свободы w=2



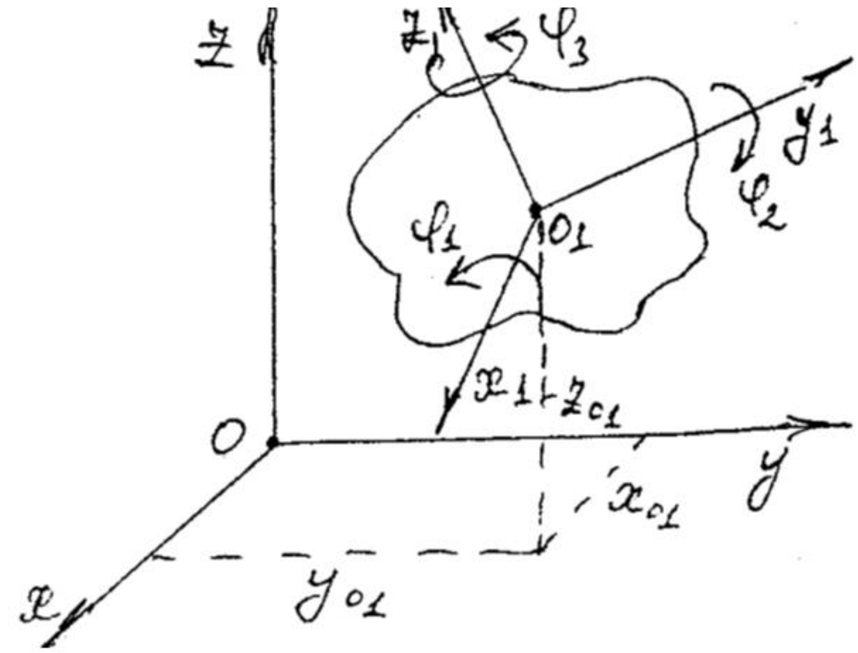
q_1=φ_1
q_2=φ_2

5) Свободная материальная точка. Степень свободы w=3



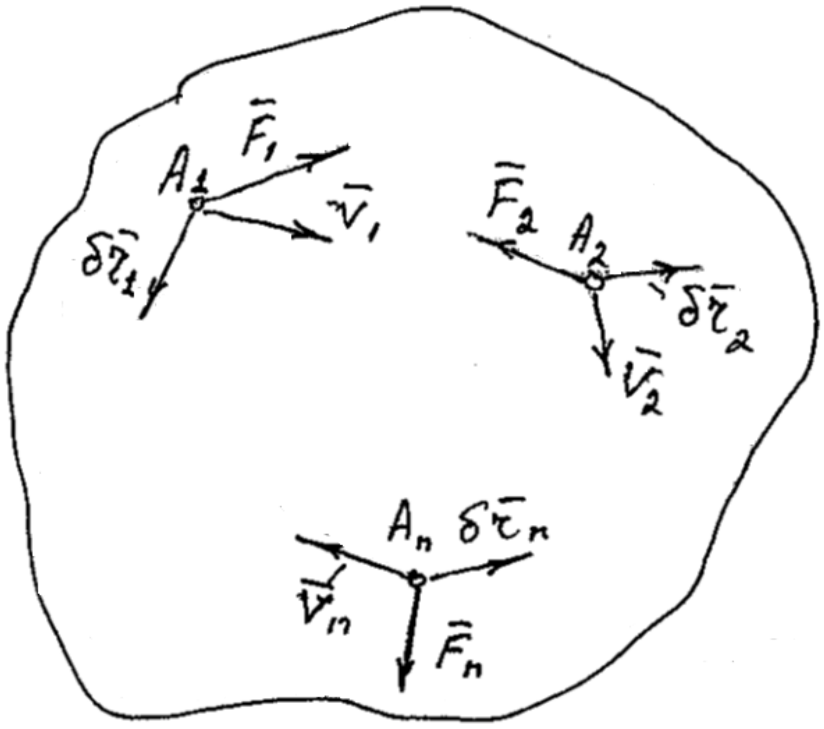
q_1=x
q_2=y
q_3=z

6) Свободное материальное тело. Степень свободы w=6



$q_1 = x_{01}$
$q_2 = y_{01}$
$q_3 = z_{01}$
$q_4 = \varphi_1$
$q_5 = \varphi_2$
$q_6 = \varphi_3$

3.2. Обобщенная скорость



Рассмотрим механическую систему, состоящую из n- материальных точек, на которой действуют силы F_1, F_2, …, F_n.

Пусть система имеет W- степеней свободы и ее положение определяется обобщенными координатами q_1, q_2, …,q_w.

Сообщим системе такое независимое возможное перемещение, при котором координата q_1 получает приращение δq_1, а остальные координаты не изменяются. Тогда каждый из радиус-векторов r_i точек системы получит элементарное приращение δr_i.

Выразим радиус-вектор i- ой точки, который является в общем случае функцией обобщенных координат и времени, т. е.

$\boldsymbol{r_i}$=$\boldsymbol{r_i}(\boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{q_2}, \ldots, \boldsymbol{q_w}, \mathbf{t})$, (3.1)

где q_1, q_2, …,q_w -обобщенные координаты; i=1, 2, …, n.

Тогда скорость i –ой точки

$\boxed{V_i = \frac{dr_i}{dt}}$ (3.2)

Радиус-вектор r_i является сложной функцией времени, т. к. обобщенные координаты q_1, q_2, …,q_w являются также функциями времени, следовательно, при выражения (3.1), необходимо это учитывать.

$V_i = \frac{dr_i}{dq_1}\cdot q_1 + \frac{dr_i}{dq_2}\cdot q_2 + \ldots + \frac{dr_i}{dq_w}\cdot q_w$

Отсюда $V_i = {}_{k=1}^{w} \frac{dr_i}{dq_k}\cdot q_k + \frac{dr_i}{dt}$, $\frac{dr_i}{dt}$=0.

В случае стационарных связей

$\boxed{V_i = {}_{k=1}^{w} \frac{dr_i}{dq_k}\cdot q_k}$, где $\boxed{q_k = \frac{dq_k}{dt}}$ - обобщенная скорость, соответствующая некоторой обобщенной координате.

<u>Обобщенной скоростью, соответствующей обобщенной координате,</u> называется скалярная величина, равная производной от этой обобщенной координаты по времени, т. е.

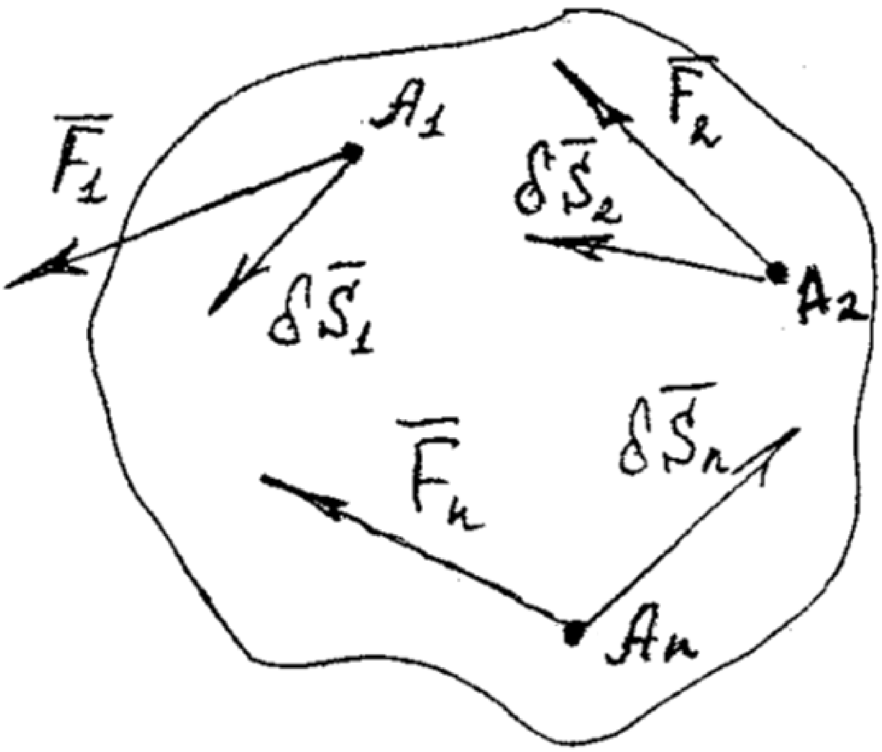
$\boxed{q_k = \frac{dq_k}{dt}}$ - обобщенная скорость, соответствующая обобщенной координате q_k.

Размерность обобщенной скорости зависит от размерности обобщенной координаты. Например, если q_k в м , то q_k в м/с

q_k в рад , то q_k в рад/с

q_k в м^2 , то q_k в м^2/с

3.3. Обобщенные силы.



Пусть система имеет w- обобщенных координат q_1, q_2, …,q_w. Дадим приращение (вариацию) δq_k одной из обобщенных координат q_k.

(δq_k-приращение или вариация обобщенной координаты q_k).

Приращение δq_k вызывает возможные перемещения всех точек системы.

Тогда элементарные работы сил на этих возможных перемещениях будут равны

$$\delta A_1 = F_1 \cdot \delta S_1 \cdot \cos(F_1; \delta S_1)$$

$$+ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\delta A_n = F_n \cdot \delta S_n \cdot \cos(F_n; \delta S_n)$$

$\Sigma\delta A_i = \Sigma F_i \cdot \delta S_i \cdot \cos(F_i; \delta S_i)$

Тогда $\boxed{Q_k = \frac{\Sigma\delta A_i}{\delta q_k}}$, где Q_k-обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_k, δq_k- приращение обобщенной координаты.

Т. о. **<u>обобщенной силой, соответствующей данной обобщенной координате,</u>** называется особая скалярная величина, равная отношению алгебраической суммы элементарных работ всех задаваемых (активных) сил на возможном перемещении системы, вызванным приращением (вариацией) этой обобщенной координаты, к приращению (вариации) данной обобщенной координаты.

<u>Число обобщенных сил всегда равно числу обобщенных координат.</u>

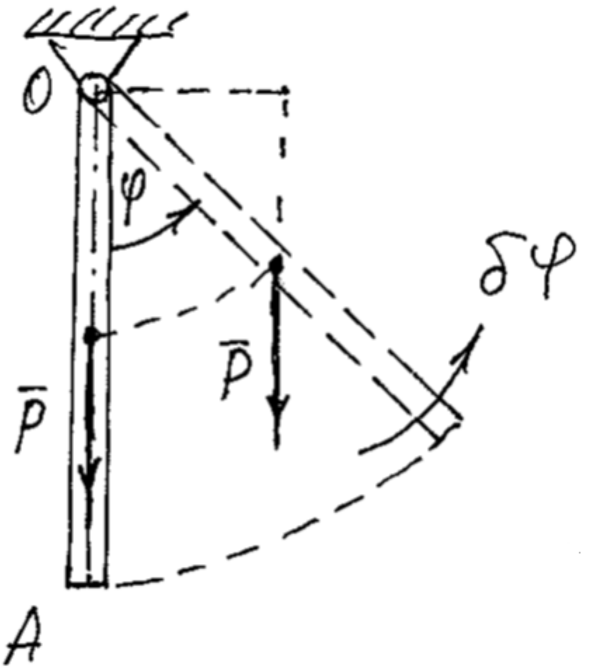
Размерность обобщенных сил зависит от размерностей обобщенных координат.

$Q_k = \frac{A}{\delta q_k}$.

Например, если δq_k-в м, то $Q_k = \frac{\text{кГ·м}}{\text{м}} = \text{кГ}$;

если δq_k-в рад, то $Q_k = \frac{\text{кГ·м}}{\text{рад}}$.

Примеры вычисления обобщенных сил.



Пример 1. Дано: OA=L, P

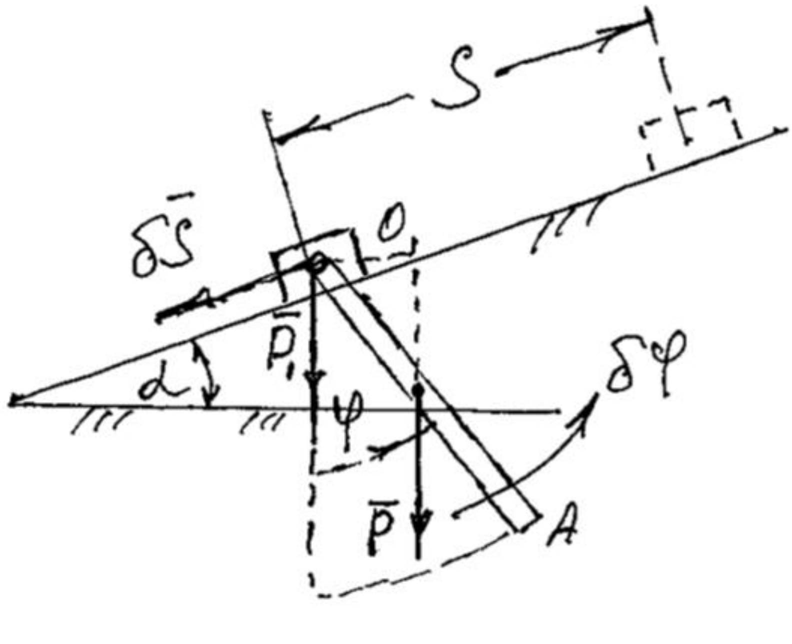
Определить: Q-?

Решение: физический маятник является системой с одной степенью свободы. За обобщенную координату принимаем угол φ. Дадим маятнику обобщенное возможное перемещение δφ, тогда

δA=$m_0(P)$· δφ= - 0,5·P·L·sin φ· δφ.

В этом случае $Q_\varphi=\frac{\delta A}{\delta\varphi}= -\frac{0{,}5\cdot P\cdot L\cdot \sin\varphi\cdot \cancel{\delta\varphi}}{\cancel{\delta\varphi}}= -0{,}5\cdot P\cdot L\cdot\sin\varphi$

Пример 2.



Данная система имеет две степени свободы и, соответственно, две обобщенные координаты, независимые друг от друга S и φ.

а) δS≠0; δφ=0.

$\Sigma\delta A_i = P_1 \cdot \delta S \cdot \sin\alpha + P \cdot \delta S \cdot \sin\alpha = (P_1 + \mathrm{P}) \cdot \sin\alpha \cdot \delta S$

$Q_s = \frac{\Sigma\delta A_i}{\delta S} = \frac{(P_1+\mathrm{P}) \cdot \sin\alpha \cdot \cancel{\delta S}}{\cancel{\delta S}} = (P_1 + \mathrm{P}) \cdot \sin\alpha$

б) δS=0; δφ≠0.

$\delta \mathrm{A} = m_0(P) \cdot \delta\varphi = -\,\mathrm{P} \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin\varphi \cdot \delta\varphi$

$Q_\varphi = -\,\frac{0{,}5 \cdot \mathrm{P} \cdot \mathrm{L} \cdot \sin\varphi \cdot \cancel{\delta\varphi}}{\cancel{\delta\varphi}} = -\,0{,}5 \cdot \mathrm{P} \cdot \mathrm{L} \cdot \sin\varphi$

3.4. Дифференциальные уравнения Лагранжа II рода

Для механической системы с w- степенями свободы можно записать w следующих дифференциальных уравнений Лагранжа II рода.

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_w} - \frac{\partial T}{\partial q_w} = Q_w \end{array}}$$

w дифференциальных уравнений Лагранжа II рода,

где Т- кинетическая энергия механической системы;

q_k- обобщенные координаты;

q_k- обобщенные скорости;

Q_k- обобщенные силы.

3.5. Методика составления и решения уравнения Лагранжа II рода

Составление этих уравнений и последующее их решение ведется в следующей последовательности:

1) Определяют число степеней свободы системы.

2) Выбирают независимые обобщенные координаты системы, соответствующие числу степеней свободы этой системы.

3) Определяют обобщенные силы, соответствующие выбранным обобщенным координатам.

4) Вычисляют кинетическую энергию системы, выражая ее через обобщенную скорость.

5) Определяют (находят) частные производные от кинетической энергии системы по обобщенным скоростям, а затем вычисляют производные от них по времени.

6) Находят частные производные от кинетической энергии по обобщенным координатам.

7) Полученные в пунктах 3, 5 и 6 результаты подставляют в уравнение Лагранжа II рода и определяют искомые величины.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется обобщенной координатой? Приведите примеры.
2. Какая величина называется обобщенной скоростью и обобщенной силой, соответствующей некоторой обобщенной координате системы? Каковую она имеет размерность?
3. Приведите пример вычисления обобщенной силы.
4. Какой вид имеют уравнения Лагранжа II рода?
5. По какой методике решаются задачи при помощи уравнений Лагранжа II рода?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
2. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.
3. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике [Текст]: Учебное пособие / И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
4. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная

1. **Бутенин, Н.В.** Введение в аналитическую механику [Текст]: Учеб. пособие для вузов / Н. В. Бутенин, Н. А. Фуфаев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1991. – 256 с.: ил.; 22 см. – 11750 экз. – ISBN 5-02-014221-2.
2. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
3. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. – Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
4. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.

Лекция 4

ТЕОРИЯ УДАРА

4.1. Основные определения

Явление, при котором скорости точек тела за очень малый промежуток времени изменяются на конечную величину, называется **ударом.**

Силы, при действии которых происходит удар, называются **ударными силами** и обозначаются $F_{уд}$.

Очень малый промежуток времени τ, в течении которого происходит удар, называется **временем удара.**

4.2. Основное уравнение удара

Т. к. ударные силы велики и за время удара изменяются в значительных пределах, то в теории удара в качестве меры взаимодействия тел рассматривают не ударные силы, а их импульсы.

$$\boxed{S_{уд} = {}_{0}^{\tau} F_{уд} \cdot dt = F_{уд} \cdot \tau} \qquad (4.1)$$

Ударные импульсы, определяемые по формуле (4.1), являются величиной конечной. Импульсами ударных сил (сил тяжести), как правило, пренебрегают.

В дальнейшем скорость в начале удара будем обозначать V, а в конце удара -U.

Тогда теорема об изменении количества движения точки при ударе примет вид:

$$\boxed{m \cdot U - m \cdot V = \Sigma S_i} \text{ или } \boxed{m \cdot \ U - V \ = \Sigma S_i} \qquad (4.2)$$

Векторное изменение количества движения материальной точки за время удара равно геометрической сумме действующих на точку ударных импульсов.

Уравнение (4.2) является основным уравнением теории удара.

При решении задач перемещением точки за время удара τ равным $V_{ср} \cdot \tau$ пренебрегают в виду его малости.

4.3. Общие теоремы теории удара.

4.3.1. Теорема об изменении количества движения системы.

$$\boxed{Q_2 - Q_1 = {}_{i=1}^{n} S_i^E} \qquad (4.3)$$

$$\boxed{\Sigma m_i U_i - \Sigma m_i V_i = \Sigma S_i^E}$$

Т. е. векторное изменение количества движения системы за время удара равно геометрической сумме внешних ударных импульсов, действующих на систему.

Причем, если S_i^E=0, то Q_2=Q_1=const.

В проекциях на любую ось, например *x*:

$$\boxed{Q_{2x} - Q_{1x} = \Sigma S_{ix}^{E}}$$

4.3.2. Теорема об изменении кинетического момента при ударе.

$$\boxed{K_2 - K_1 = \Sigma m_0(S_i^E)}$$

$$\boxed{\Sigma r_i \cdot m_i U_i - \Sigma r_i \cdot m_i V_i = \Sigma m_0(S_i^E)} \qquad (4.4)$$

Т. е. <u>векторное изменение кинетического момента относительно любого центра системы при ударе равно геометрической сумме моментов относительно того же центра всех действующих на систему внешних ударных импульсов.</u>

Причем, если $\Sigma m_0(S_i^E)$=0, то $K_2 = K_1$

В проекциях на любую ось, например X:

$K_{2x} - K_{1x} = \Sigma m_x(S_{ix}^E)$

В практических расчетах при решении задач векторные уравнения (4.2), (4.3) и (4.4) необходимо проектировать на выбранную систему координат.

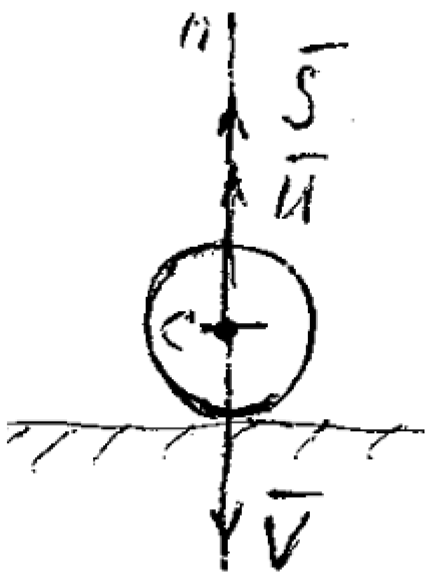
4.4. Коэффициент восстановления при ударе.

Величина ударного импульса зависит не только от масс соударяющихся тел и их скорости до удара, но и от упругих свойств соударяющихся тел.

Эти свойства характеризуются коэффициентом восстановления K.

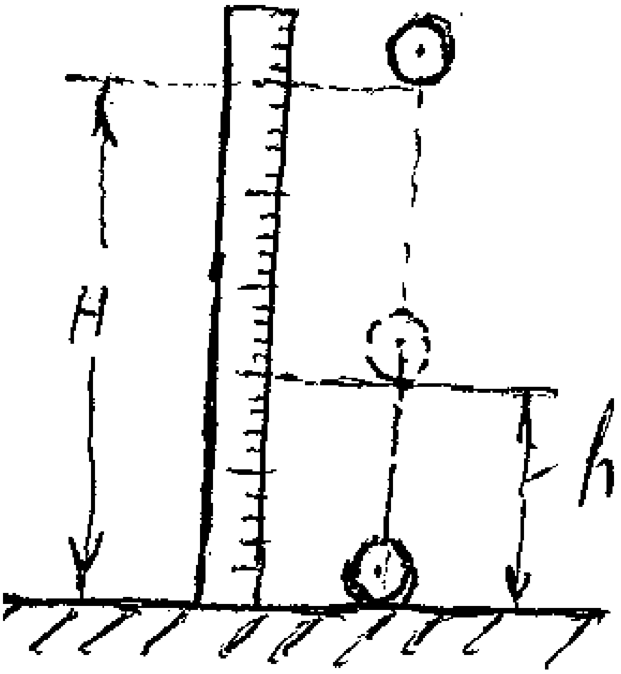
$$\boxed{K = \frac{U}{V}}$$

Величина K при прямом ударе тела о неподвижную преграду, численно равная отношению модуля скорости тела в конце удара к модулю скорости в начале удара, называется **<u>коэффициентом восстановления при ударе.</u>**



Различают абсолютно упругий удар (K=1) и абсолютно неупругий удар (K=0). Эти случаи являются предельными.

Значения K определяют экспериментальным путем.



По формуле Галилея:

V= $\sqrt{2\cdot g\cdot H}$; а U= $\sqrt{2\cdot g\cdot h}$

K=$\frac{U}{V}$= $\sqrt{\frac{h}{H}}$

4.5. Удар тела о неподвижную преграду.

При ударе тела о неподвижную преграду различают два случая: прямого и косого ударов.

Если нормаль к поверхности тела в точке его касания с плитой (преградой) проходит через центр масс тела (для шара это будет всегда), то такой удар называется **центральным.**

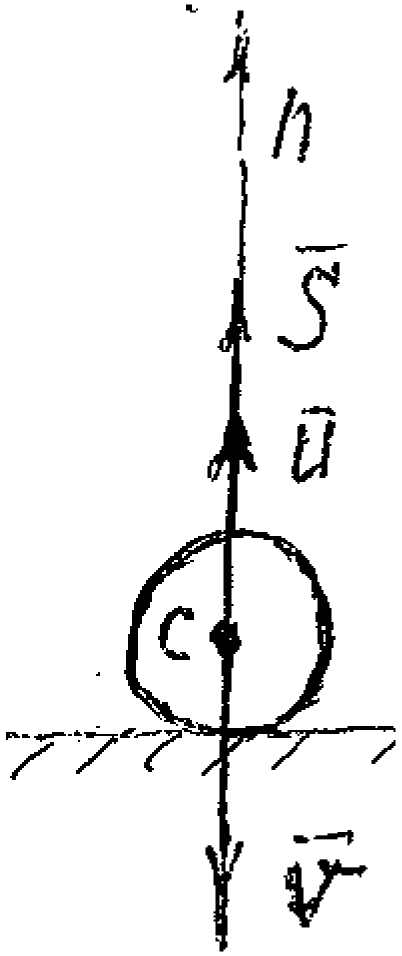
При этом, если скорость $\boldsymbol{V}$ центра масс тела в начале удара направлена по нормали **n** к плите, то удар будет **прямым**, в противном случае – **косым.**

4.5.1. Случай прямого удара.

Запишем теорему об изменении количества движения механической системы при ударе в проекции на **n**:

M·U_n- M·V_n= S_n;

M(U_n-V_n)= S_n,



но при прямом ударе

U_n=U, V_n=-V, S_n=S.

Следовательно, $\boxed{M\ \ U+V\ \ =S}$ (4.5)

Второе уравнение, необходимое для решения задачи, можно получить из определения K=$\frac{U}{V}$, т. е.

$\boxed{U=K\cdot V}$ (4.6)

Из полученных уравнений (1) и (2), зная **M, V, K**, можно определить U и S.

S=M(K+1)·V

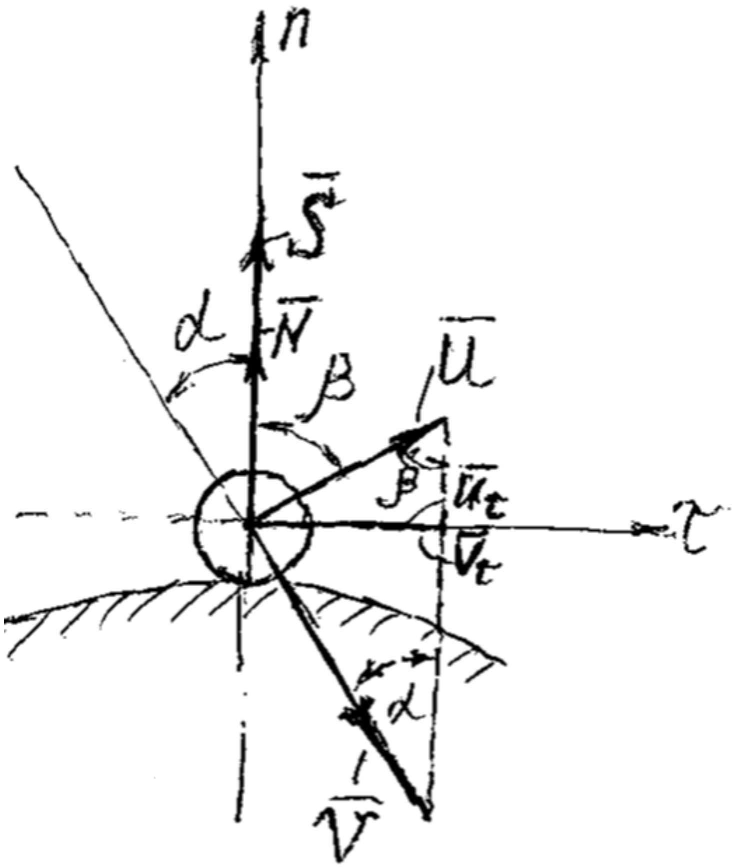
Для определения величины ударной силы (реакции), надо знать **τ**, которое находится экспериментально.

4.5.2. Случай косого удара.

В этом случае теорема об изменении количества движения механической системы, при ударе, в проекциях на **n** и **τ** будет иметь вид:

на **τ**: M(U_τ-V_τ)=0 (4.7)

на **n**: M(U_n-V_n)=S (4.8)



В этом случае K=$\frac{U_n}{V_n}$, т. к. удар происходит только по направлению нормали с учетом знаков.

U_n= - K·V_n (4.9)

В результате находим из (1):

U_τ=V_τ (4.10)

Из (2) с учетом (3):

S= - M·K·V_n- M·V_n=M· V_n ·(1+K)

S= M· V_n ·(1+K) (4.11)

Из полученных уравнений (4.7), …, (4.11) можно найти U и S, если известны M, V, α и K.

В частности из равенства (4.10), учитывая, что V_τ= V_n ·$\tan\alpha$ и

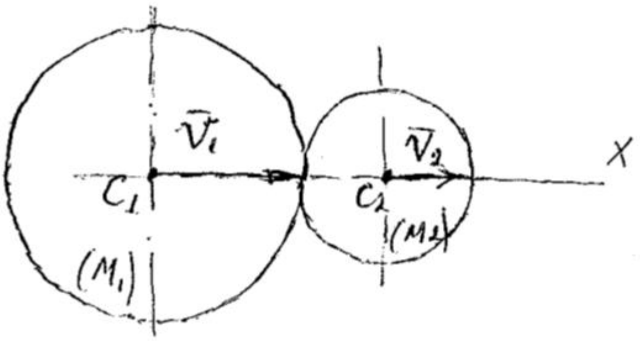
U_τ= U_n ·$\tan\beta$, получаем U_n ·$\tan\beta$= V_n ·$\tan\alpha$

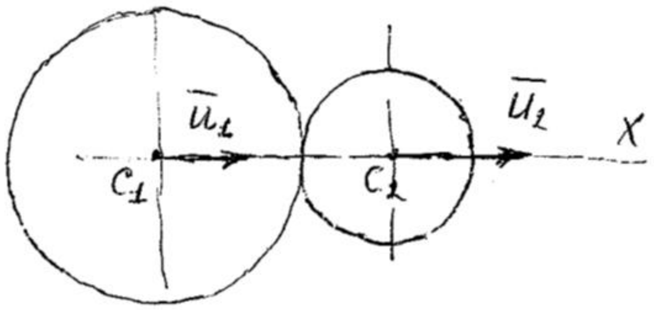
Откуда K=$\frac{U_n}{V_n}$=$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$.

Т. к. K<1, то α<ß, т. е. угол падения всегда меньше угла отражения.

4.6. Прямой центральный удар двух тел (удар шаров).

Прямым и центральным ударом 2-х тел называется такой удар, когда общая нормаль к поверхностям тел в точке их касания проходит через их центры масс, и когда скорости центров масс обоих тел в начале удара направлены по этой общей нормали.





Пусть дано: M_1, M_2, V_1, V_2, U_1, U_2.

Чтобы произошел удар, необходимо, чтобы $V_{1x}>V_{2x}$.

Кроме того, после удара $U_{2x}>U_{1x}$, т. к. ударившее тело не может опередить ударяемое.

Считая известными M_1, M_2, V_{1x}, V_{2x} и K, найдем U_{1x} и U_{2x}, S_{1x} и S_{2x}.

Применим теорему об изменении количества движения системы при ударе, рассматривая шары как одну систему. Тогда ударные силы, действующие между телами, будут считаться внутренними. Из этого:

$\Sigma S_i=0$, тогда $Q_{x2}=Q_{x1}$ или

$M_1 \cdot U_{1x}+M_2 \cdot U_{2x}=M_1 \cdot V_{1x}+M_2 \cdot V_{2x}$ (4.12)

В этом случае ($U_{1x} \le U_{2x}$)

$\boxed{K=\frac{U_{1x}-U_{2x}}{V_{1x}-V_{2x}}}$ (4.13)

Или $U_{1x}-U_{2x}=-K \cdot (V_{1x}-V_{2x})$ (4.14)

Система уравнений (4.12) и (4.14) позволяет решить поставленную задачу. Для этого достаточно рассмотреть одно какое-нибудь тело, например, первое. Тогда по теореме об изменении количества движения материальной точки в проекциях на ось x можно найти ударный импульс:

$-S_{1x}=M_1(U_{1x}-V_{1x})$, а $S_{2x}=-S_{1x}$ (4.15)

<u>Рассмотрим два предельных случая:</u>

а) K=0 (абсолютно неупругий удар)

Из (4.12) и (4.14) находим

$\boxed{U_{1x}=U_{2x}=\frac{M_1 \cdot V_{1x}+M_2 \cdot V_{2x}}{M_1+M_2}}$ (4.16)

$\boxed{S_{2x}=-S_{1x}=\frac{M_1 \cdot M_2}{M_1+M_2}(V_{1x}-V_{2x})}$ (4.17) б) K=1 (абсолютно упругий удар)

Из (4.12) и (4.14) находим

$$\boxed{\begin{aligned} U_{1x} &= V_{1x} - \frac{2M_2}{M_1+M_2}(V_{1x} - V_{2x}) \\ U_{2x} &= V_{2x} + \frac{2M_1}{M_1+M_2}(V_{1x} - V_{2x}) \end{aligned}} \qquad (4.18)$$

<u>Ударный импульс.</u>

$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{2M_1 \cdot M_2}{M_1+M_2}(V_{1x} - V_{2x})$

При абсолютно упругом ударе, ударный импульс вдвое больше, чем при абсолютно неупругом. В частном случае, когда $M_1 = M_2$ из (7) $U_{1x} = V_{2x}$,

$U_{2x} = V_{1x}$, т. е. шары (тела) обмениваются скоростями.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое явление называют ударом?
2. Чем характеризуется ударная сила?
3. Сформулируйте теоремы об изменении количества движения материальной точки и механической системы?
4. Могут ли внутренние ударные импульсы изменить количество движения механической системы?
5. Что называют коэффициентом восстановления при ударе? Как данный коэффициент определяется на практике?
6. Какие есть виды удара тела о неподвижную преграду? Как определяется скорость тела после удара для каждого вида?
7. Какой удар двух тел называется прямым центральным? Как в этом случае определяется коэффициент восстановления?
8. Какой удар называется абсолютно упругим и абсолютно неупругим?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
2. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.
3. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике [Текст]: Учебное пособие / И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
4. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная

1. **Бутенин, Н.В.** Введение в аналитическую механику [Текст]: Учеб. пособие для вузов / Н. В. Бутенин, Н. А. Фуфаев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1991. – 256 с.: ил.; 22 см. – 11750 экз. – ISBN 5-02-014221-2.
2. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
3. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. – Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
4. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.

Лекция 5

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

5.1. Основные определения. Классификация колебаний.

Среди механических движений особое место занимают движения, параметры которых периодически повторяются. Такие движения называются **механическими колебаниями.**

Так к механическим колебаниям относятся колебания маятников, струн, мостов, деталей машин и механизмов и т. п.

Колебательное движение является частным случаем движения точки или тела.

Классификация колебаний.

В общем случае под колебанием будем понимать такие процессы, при которых параметры, характеризующие движение, многократно то увеличиваются, то уменьшаются.

Различают следующие виды колебаний:

1) **Периодические** – когда параметры, характеризующие движение, периодически повторяются.

2) **Непериодические** – когда параметры, характеризующие движение, повторяются непериодически.

3) **Линейные** – которые описываются системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

4) **Нелинейные** – которые описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

5) **Свободные или собственные колебания** – которые совершаются под действием первоначального импульса и восстанавливающей силы.

6) **Вынужденные колебания** – которые совершаются под действием дополнительной (возмущающей) силы.

5.2. Колебательное движение материальной точки.

На предыдущих лекциях мы знакомились с общими законами движения материальной точки.

Теперь перейдем к изучению одной частной задачи, а именно, задачи о колебательном движении материальной точки.

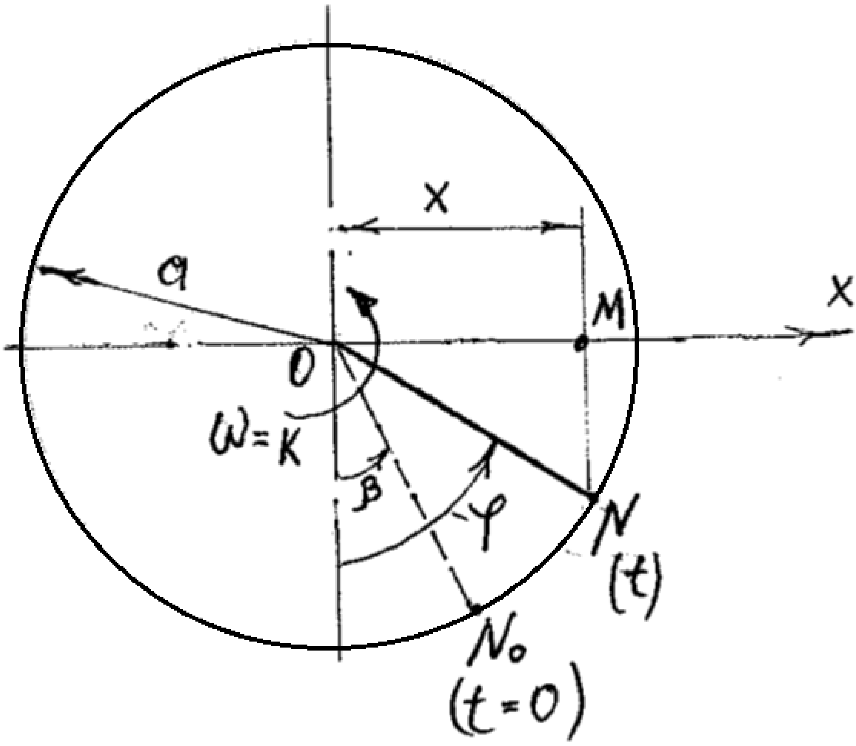
С колебательными движениями материальных точек и механических систем часто приходится встречаться в технике.

Так, например, элементы машин и сооружений (металлические, деревянные, каменные и т. д.), входящие в состав какой-либо машины или сооружения, будучи в той или иной степени упругими под действием приложенных к ним сил, способны вибрировать во время работы машины.

При некоторых условиях эти вибрации могут достигать значительных величин, опасных для прочности машины, сооружения, а также колебаний, вредных для нормальной работы машины.

Поэтому задача заключается в том, чтобы изучить вопросы колебательного движения и тем самым предотвратить те случаи вибраций машин и сооружений, которые являются опасными.

5.3. Кинематика гармонического колебательного движения материальной точки.



Пусть радиус ON начинает вращаться из положения ON_0 с постоянной угловой скоростью ω=k.

Тогда точка M будет двигаться по оси OX, совершая колебания около т. O.

Движение т. M в этом случае называется **гармоническим колебательным движением.**

Составим уравнение гармонического колебательного движения, т. е. x=f(t)

OM=x; $\angle\varphi = \angle\beta + \angle N_0ON$; $\angle N_0ON = kt$.

Тогда φ=kt+ β. Из ΔONM $x = ON \cdot \sin\varphi$ или $x = a \cdot \sin\varphi$.

Подставим полученные значения:

$\boxed{x = a \cdot \sin(kt + \beta)}$ - уравнение (закон) гармонического колебательного движения, где a – амплитуда колебаний т. M.

Величина наибольшего отклонения т. M от ее центра колебаний называется **амплитудой колебаний.**

Амплитуда колебаний всегда величина положительная. Угол φ=kt+ β называется **фазой колебаний т. M.** Угол β (фаза φ при t=0) называется **начальной фазой**

колебаний. Постоянная K называется **круговой частотой колебаний** или **частотой колебаний.** **T**- период колебаний.

Периодом колебаний т. М называется промежуток времени, в течение которого т. М совершает два размаха (одно полное колебание).

За время T вращающийся радиус ON совершит один полный оборот вокруг т.O, т.е. повернется на угол φ=2π.

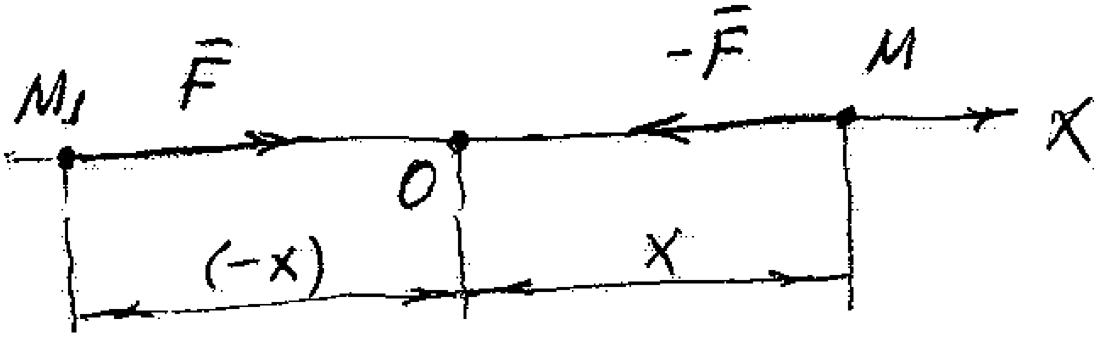
Но т. к. радиус вращается с постоянной угловой скоростью K, то φ=kT, т. е.

kT=2π. Отсюда

$\boxed{T = \frac{2\pi}{k}}$ - период колебания точки, совершающей гармоническое колебательное движение.

5.4. Свободные колебания материальной точки.

Свободным колебательным движением точки называется такое движение точки, если оно происходит под действием силы, величина которой пропорциональна удалению точки от некоторого центра притяжения и направлена все время к этому центру.



F=cx – восстанавливающая сила.

c=$\frac{F}{x}$ $\left(\frac{\text{единица силы}}{\text{единица длины}}\right)$; в технической системе c=$\frac{F}{x}$ $\left(\frac{\text{кГ}}{\text{м}}\right)$

c – это величина восстанавливающей силы в тот момент, когда точка находится на расстоянии единицы длины от центра притяжения.

Составим дифференциальное уравнение движения т.М.

$m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}= - F$; $m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}= - cx$; $\frac{d^2x}{dt^2}= - \frac{c}{m}x$; $\frac{c}{m}=k^2$; $\frac{d^2x}{dt^2}= - k^2 \cdot x$

$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 \cdot x = 0}$ – дифференциальное уравнение свободных колебаний точки, при отсутствии сил сопротивления.

Мы получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение такого типа уравнений известно из теории линейных однородных дифференциальных уравнений.

Решение имеет вид:

$\boxed{x = c_1 \cdot \cos kt + c_2 \cdot \sin kt}$ (5.1)

где c_1 и c_2 - постоянные интегрирования.

Заменим c_1 и c_2 новыми постоянными a и β, положив:

c_1=a·$\sin \beta$ и c_2=a·$\cos \beta$.

Подставим их в уравнение (5.1):

x= a·$\sin \beta \cdot \cos kt$+ a·$\cos \beta \cdot \sin kt$=a($\sin \beta \cdot \cos kt$+$\cos \beta \cdot \sin kt$).

Отсюда $\boxed{x = a \cdot \sin(kt + \beta)}$ (5.2) – уравнение (закон) свободных колебаний точки.

<u>Свободные колебания материальной точки являются гармоническими колебаниями.</u>

В уравнении (2) полученные постоянные интегрирования a и β представляют амплитуду колебаний и начальную фазу колебаний. Эти постоянные интегрирования определяются из начальных условий движения точки.

Продифференцируем уравнение (5.2):

$\boxed{V = \frac{dx}{dt} = ak\cos(kt + \beta)}$ (5.3) – закон изменения скорости, при свободном движении точки.

По начальным данным определим значения амплитуды и начальной фазы.

При t=0 x_0=a·$\sin \beta$ и V_0=ak·$\cos \beta$

x_0- начальная координата т. М – при t=0

V_0- начальная скорость т. М – при t=0

Возведем их в квадрат

$x_0^2 = a^2 \cdot \sin^2 \beta$ $\sin^2 \beta = \frac{x_0^2}{a^2}$

$V_0^2 = a^2 k^2 \cdot \cos^2 \beta$ $\cos^2 \beta = \frac{V_0^2}{a^2 k^2}$

Сложим: $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{V_0^2}{a^2 k^2} = 1 \Rightarrow x_0^2\, k^2 + V_0^2 = a^2 k^2$

$\boxed{a = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2}}}$ (5.4) – амплитуда свободных колебаний точки.

Т. к. $\sin \beta = \frac{x_0}{a}$; $\cos \beta = \frac{V_0}{ak}$, то $\tan \beta = \frac{\frac{x_0}{a}}{\frac{V_0}{ak}}$

$\boxed{\tan \beta = \frac{k \cdot x_0}{V_0}}$ (5.5) – начальная фаза свободных колебаний точки.

Частота свободных колебаний

$\boxed{k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{c \cdot g}{P}}}$, (5.6)

где P- вес точки.

Размерность:

$$k=\sqrt{\frac{c\cdot g}{P}} \qquad \sqrt{\frac{\cancel{кГ\cdot м}}{\cancel{м}\cdot сек^2\cdot\cancel{кг}}}=\frac{1}{сек}=сек^{-1}$$

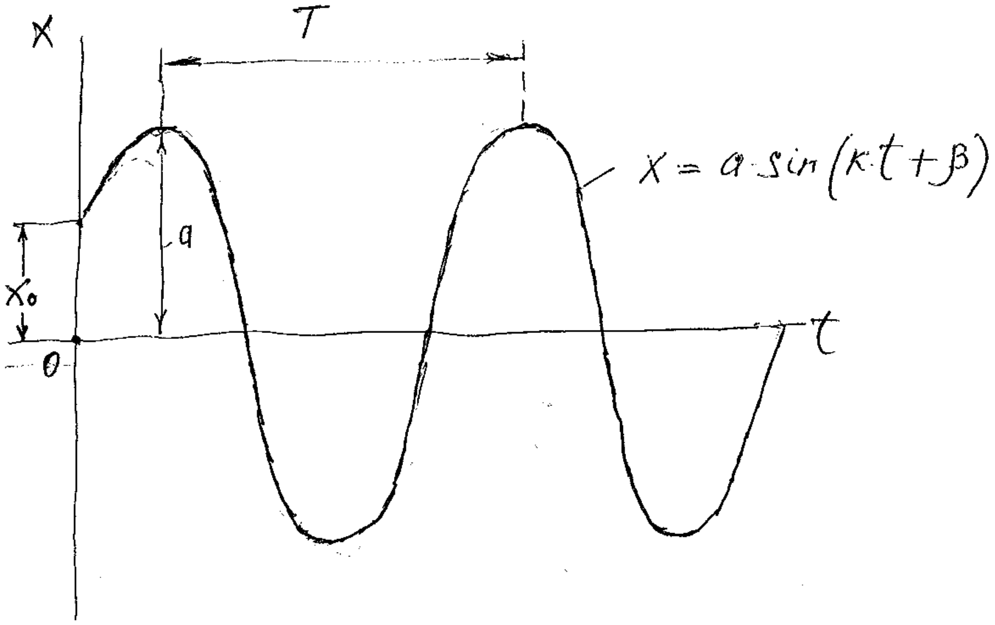
Период свободных колебаний точки

$$T=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c}{m}}}=2\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{c}}=2\pi\cdot\sqrt{\frac{P}{c\cdot g}}$$

$$\boxed{T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{P}{c\cdot g}}} \qquad (5.7)$$

<u>Вывод:</u> как видно из выражений (5.6) и (5.7), частота и период свободных колебаний не зависят от начальных условий.

Изобразим график свободных колебаний точки, воспользовавшись уравнением $x=a\cdot\sin(kt+\beta)$.



5.5. Свободные колебания точки при наличии сил сопротивления (затухающие колебания).

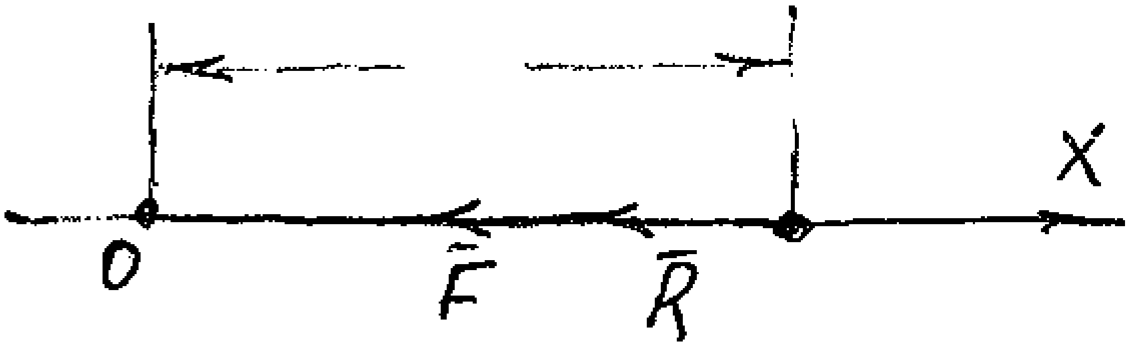
До сих пор мы рассматривали колебательное движение материальной точки без учета сил сопротивления. В реальных же условиях колеблющаяся точка испытывает сопротивление движению (трение, сопротивление среды, электромагнитное сопротивление и др.).

В этом случае помимо восстанавливающей силы на точку будет действовать еще сила сопротивления, направленная всегда в сторону, противоположную движению точки.

Закон изменения этой силы сопротивления зависит от физической природы этой силы. Если это сила трения-скольжения, то ее модуль можно считать постоянным.

При малых скоростях движения в воздухе, сила сопротивления считается пропорциональной 1-ой степени скорости точки, а при больших скоростях движения точки, сила сопротивления пропорциональна квадрату ее скорости.

Рассмотрим колебательное движение точки под действием восстанавливающей силы и силы сопротивления, пропорциональной 1-ой степени скорости точки.



F=c·x – восстанавливающая сила,

R=α·V=α·x – сила сопротивления.

Составим дифференциальное уравнение движения точки по оси **x**.

m$\frac{d^2x}{dt^2} = -R - F = -\alpha \cdot V - c \cdot x$

Или, поделив на **m** и перенеся все в одну сторону, получим

$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \cdot V + \frac{c}{m} \cdot x = 0,$

где: $\frac{\alpha}{m} = k^2$; $\frac{c}{m} = 2n$=> n=$\frac{c}{2m}$

Тогда $\boxed{x + 2nx + k^2x = 0}$ - дифференциальное уравнение движения точки под действием восстанавливающей силы и силы сопротивления.

Составим характеристическое уравнение: $z^2 + 2nz + k^2 = 0$

Если n< k, то корни характеристического уравнения будут:

$z_1 = -n + i \cdot \sqrt{k^2 - n^2}$; $z_2 = -n - i \cdot \sqrt{k^2 - n^2}$.

Тогда решение итогового дифференциального уравнения будет иметь вид:

x=$e^{-nt}(c_1 \cdot \cos\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + c_2 \cdot \sin\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t)$

Заменим $c_1 = a \cdot \sin\beta$; $c_2 = a \cdot \cos\beta$

x=$e^{-nt}(a \cdot \sin\beta \cdot \cos\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + a \cdot \cos\beta \cdot \sin\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t)$

x=a·$e^{-nt}(\sin\beta \cdot \cos\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + \cos\beta \cdot \sin\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t)$

Т. к.

$\sin\beta \cdot \cos\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + \cos\beta \cdot \sin\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t = \sin(\sin\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + \beta)$,

то $\boxed{x = \mathrm{a} \cdot e^{-nt} \cdot \sin(\sin\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + \beta)}$ (5.8) – уравнение колебательного движения точки под действием восстанавливающей силы и силы сопротивления.

Продифференцируем выражение (5.8) по времени:

$x = -ane^{-nt} \cdot \sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \beta) + \mathrm{a}e^{-nt} \cdot \cos(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \beta) \cdot \sqrt{k^2 - n^2}$

$x = -nae^{-nt} \cdot \sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \beta) + a\sqrt{k^2 - n^2} \cdot e^{-nt} \cdot \cos(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \beta)$

x= $ae^{-nt} \cdot \sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \beta)$

$x = -nx + a\sqrt{k^2 - n^2} \cdot e^{-nt} \cdot \cos(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \beta)$ (5.9)

Подставим в уравнения (5.8) и (5.9) начальные условия движения точки:

x=x_0; x=V_0; t=0

$x_0 = a \cdot \sin\beta$

$V_0 = -nx_0 + \sqrt{k^2 - n^2} \cdot a\cos\beta$

Или $x_0 = a \cdot \sin\beta$ $\frac{V_0+nx_0}{\sqrt{k^2-n^2}}= a\cos\beta$

Откуда $\tan\beta = \frac{x_0\sqrt{k^2-n^2}}{V_0+nx_0}$;

$\boxed{\beta = arc\tan\frac{x_0\sqrt{k^2-n^2}}{V_0+nx_0}}$ - начальная фаза затухающих колебаний.

a= $\sqrt{x_0^2 + \frac{(V_0+nx_0)^2}{k^2-n^2}}$; $\boxed{A = ae^{-nt}}$ – амплитуда затухающих колебаний.

$\boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(V_0+nx_0)^2}{k^2-n^2}} \cdot e^{-nt}}$

$\boxed{\delta = \sqrt{k^2 - n^2}}$ - частота затухающих колебаний.

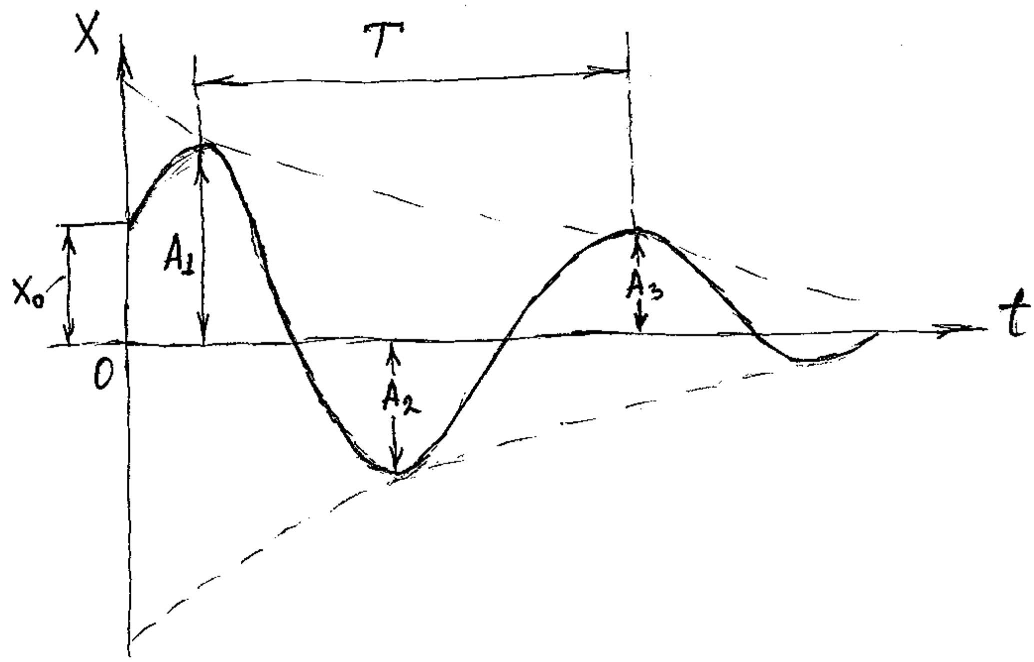
$\boxed{T = \frac{2\pi}{\delta} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2-n^2}}}$ – период затухающих колебаний.

Период и частота затухающих колебаний не зависит от начальных условий движения точки.

Начальная фаза и амплитуда затухающих колебаний зависит от начальных условий движения точки.

Амплитуда затухающих колебаний точки с течением времени уменьшается.

Построим по уравнению (5.8) график затухающих колебаний.



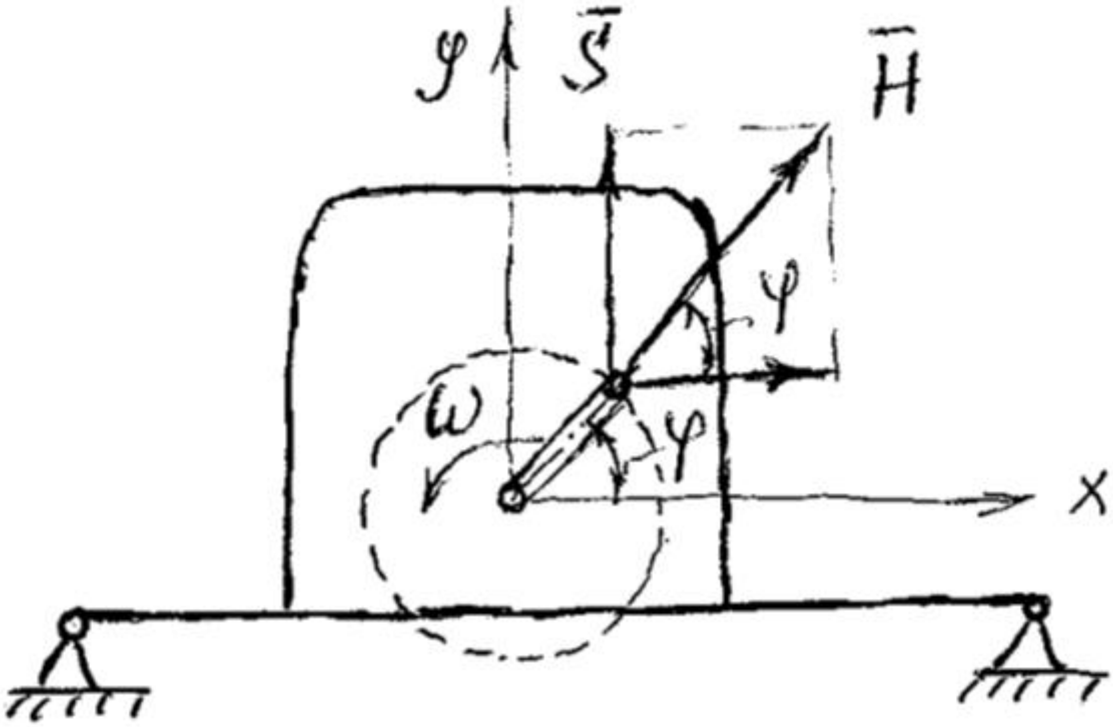
5.6. Вынужденные колебания точки.

Колебательное движение точки называется **<u>вынужденным</u>**, когда на точку наряду с восстанавливающей силой (F=c·x) действует еще периодически изменяющаяся сила, называемая **<u>возмущающей силой.</u>**

Закон изменения возмущающей силы зависит от физической природы этой силы.

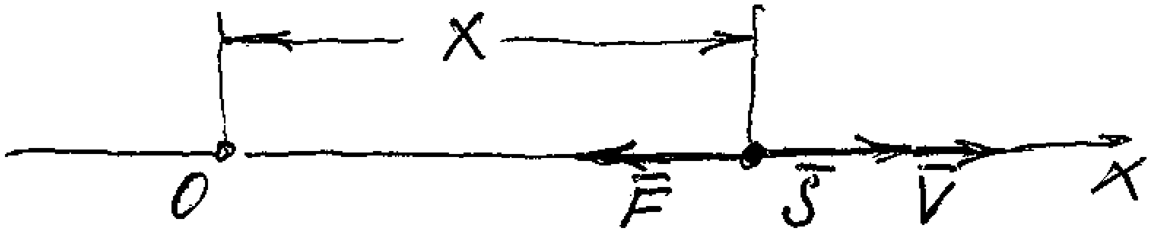
Чаще всего в технике встречаются случаи, когда возмущающая сила изменяется по гармоническому закону.

<u>Пример появления возмущающей силы (периодической).</u>



Двигатель внутреннего сгорания установлен на балке. При вращении коленчатого вала двигателя, возникает центробежная сила H, которая действует на остов двигателя. При вращении коленвала, на остов двигателя по оси **<u>y</u>** будет действовать сила **S=H·sin** $\boldsymbol{\varphi = H \cdot \sin pt}$, которая с течением времени будет изменяться как по величине, так и по направлению, раскачивая двигатель вместе с балкой то в одну, то в другую сторону. Эта сила будет нарушать равновесное положение балки. Поэтому она называется **<u>возмущающей силой.</u>**

Пусть т. M движется под действием восстанавливающей силы F=c·x и возмущающей силы S= $H \cdot \sin pt$.



F= c·x – восстанавливающая сила,

S= $H \cdot \sin pt$ - возмущающая сила.

Запишем дифференциальное уравнение движения точки:

m$\frac{d^2x}{dt^2} = -F + S = -$ c·x+$H \cdot \sin pt$; поделим на m:

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{c}{m} \cdot x + \frac{H}{m} \cdot \sin pt$; $\frac{c}{m} = k^2$, а $\frac{H}{m} = h$

$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = h \cdot \sin pt}$ - дифференциальное уравнение движения точки под действием восстанавливающей и возущающей сил.

$\boxed{x + k^2x = h \cdot \sin pt}$ (5.10)

Получим дифференциальное уравнение второго порядка с правой частью. Общее решение такого уравнения складывается из:

1) общего решения соответствующего однородного уравнения (т. е. уравнения без правой части);

2) частного решения данного уравнения x=$x_1 + x_2$,

где x_1- общее решение уравнения без правой части,

x_2 - частное решение полного уравнения.

Общее решение $x_1 = c_1 \cdot \cos kt + c_2 \cdot \sin kt$

Или, заменив c_1= $a \cdot \sin\beta$ и c_2= $a\cos\beta$, получим

$\boldsymbol{x_1 = a \cdot \sin(kt + \beta)}$.

Теперь будем искать частное решение в виде:

$\boxed{x_2 = A \cdot \sin pt}$ (5.11)

Нам необходимо подобрать постоянную **А** так, чтобы выражение (5.11) удовлетворяло уравнению (5.10).

Продифференцируем уравнение (5.11):

$x_2 = A \cdot p \cdot \cos pt$

Продифференцируем еще раз. Получим:

$x_2 = -A \cdot p^2 \cdot \sin pt$

Подставим это в уравнение (5.10):

$-A \cdot p^2 \cdot \sin pt + k^2 \cdot A \cdot \sin pt = h \cdot \sin pt$

$A \cdot \ \ k^2 - p^2 \ \ \sin pt = h \cdot \sin pt$,

Отсюда $A = \frac{h}{k^2 - p^2}$. Подставим в (5.11):

$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin pt$

И окончательно будем иметь:

$\boxed{x = a \cdot \sin(kt + \beta) + \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin pt}$ - уравнение (закон) колебательного движения точки под действием восстанавливающих и возмущающих сил.

$a \cdot \sin(kt + \beta)$ -*собственные колебания,*

$\frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin pt$ - *вынужденные колебания.*

При одновременном действии восстанавливающей и возмущающей сил, материальная точка совершает сложное колебательное движение, складывающееся из двух гармонических колебаний: собственных и вынужденных колебаний точки.

Собственные колебания точки зависят от начальных условий движения точки, а вынужденные колебания не зависят от начальных данных.

$\boxed{x_{\text{вынужд}} = \frac{h}{k^2-p^2} \cdot \sin pt}$ - уравнение (закон) вынужденных колебаний точки, где p-частота вынужденных колебаний.

$\boxed{T_{\text{вынужд}} = \frac{2\pi}{p}}$ – период вынужденных колебаний, который не зависит от начальных данных.

Амплитуда вынужденных колебаний:

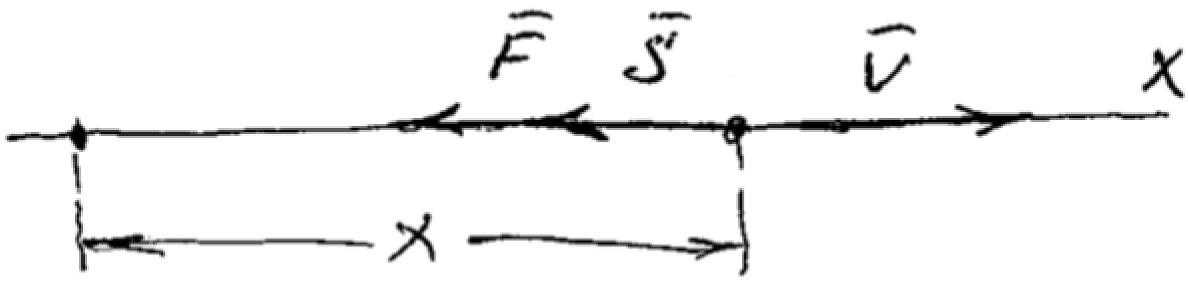
A=$\frac{h}{k^2-p^2}$ при p< k – вынужденные колебания малой частоты.

A=$\frac{h}{k^2-p^2}$ при p> k – вынужденные колебания большой частоты.

$$\boxed{x_{\text{вынужд}} = \frac{h}{p^2-k^2} \cdot \sin(pt-\pi)}$$

Если p> k, то фаза вынужденных колебаний отличается от фазы возмущающей силы на величину $\boldsymbol{\pi}$, т. е.

при p< k



при p> k вынужденные колебания и возмущающая сила лежат в противоположных фазах.

5.7. Резонанс.

A=$\frac{h}{k^2-p^2}$ - амплитуда вынужденных колебаний зависит от частот собственных и вынужденных колебаний. Даже при малом значении **h**, т. е. при малой величине возмущающей силы, амплитуда вынужденных колебаний достигает большой величины в том случае, если частота свободных и вынужденных колебаний близки друг к другу.

При **p→k A→∞.** Это явление называется резонансом.

<u>Резонансом</u> называются такие вынужденные колебания точки, при которых частота собственных колебаний равна частоте вынужденных колебаний.

Определим закон колебаний точки при резонансе:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = h \cdot \sin pt} \qquad (5.12)$$

x=$x_1 + x_2$; $\quad x_1 = a \cdot \sin(kt + \beta)$

Частное решение уравнения в виде:

$$\boxed{x_2 = B \cdot t \cdot \cos pt} \qquad (5.13)$$

Продифференцируем уравнение 1- й раз: $x_2 = B \cdot t \cdot \cos pt - B \cdot pt \cdot \sin pt$

Продифференцируем уравнение 2- й раз:

$$x_2 = -Bp \cdot \sin pt - Bp \cdot \sin pt - Bp^2t \cdot \cos pt = -2Bp \cdot \sin pt - Bp^2t \cdot \cos pt$$

Подставим в уравнение (5.12):

$-2Bp \cdot \sin pt - \cancel{Bp^2t \cdot \cos pt} + \cancel{p^2Bt \cdot \cos pt} = h \cdot \sin pt$;

$-2Bp \cdot \sin pt = h \cdot \sin pt$

Теперь подставим в уравнение (5.13):

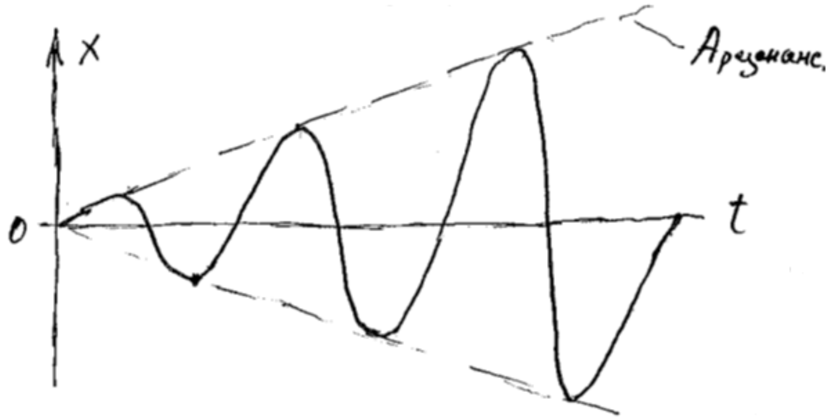
$B = -\frac{h}{2p}$; $\quad x_2 = \frac{h}{2p} t \cdot \cos pt = \frac{h}{2p} t \cdot \sin(pt - \frac{\pi}{2})$

$\boxed{x = a \cdot \sin(kt + \beta) + \frac{h}{2p} \cdot t \cdot \sin(pt - \frac{\pi}{2})}$ – уравнение колебаний точки при резонансе.

$a \cdot \sin(kt + \beta)$ - *собственные колебания*

$\frac{h}{2p} \cdot t \cdot \sin(pt - \frac{\pi}{2})$ - *вынужденные колебания.*

График вынужденных колебаний точки при резонансе будет иметь вид:



$A_{(\text{резонанс})} = \frac{h}{2p} \cdot t$ - зависит от времени.

При резонансе период собственных колебаний равен периоду вынужденных колебаний.

$$\boxed{T_{\text{собст}} = T_{\text{вынужд}}}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется механическими колебаниями? Как они классифицируются?
2. Какой вид имеет дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки?
3. Что называется частотой, периодом и амплитудой свободных колебаний материальной точки? От каких параметров они зависят?
4. Какой вид имеют графики свободных и затухающих колебаний материальной точки?
5. Какой вид имеет дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки, и каково его общее решение?
6. Как определяются амплитуда и период вынужденных колебаний?
7. При каких условиях возникает резонанс, и какой вид имеют уравнение и график вынужденных колебаний материальной точки при резонансе?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
2. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.
3. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике [Текст]: Учебное пособие / И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
4. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная

1. **Бутенин, Н.В.** Введение в аналитическую механику [Текст]: Учеб. пособие для вузов / Н. В. Бутенин, Н. А. Фуфаев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1991. – 256 с.: ил.; 22 см. – 11750 экз. – ISBN 5-02-014221-2.
2. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
3. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. – Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
4. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
2. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.
3. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике [Текст]: Учебное пособие / И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
4. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.
5. **Бутенин, Н.В.** Введение в аналитическую механику [Текст]: Учеб. пособие для вузов / Н. В. Бутенин, Н. А. Фуфаев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1991. – 256 с.: ил.; 22 см. – 11750 экз. – ISBN 5-02-014221-2.
6. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
7. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. – Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
8. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.

СОДЕРЖАНИЕ