Приложение 3.1

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский государственный аграрный университет имени Н. И. Вавилова»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

«СТАТИКА», «КИНЕМАТИКА»

краткий курс лекций

для студентов I курса

Направление подготовки

23.03.02 Наземные транспортно-технологические комплексы

Саратов 2016

УДК 531.1
ББК 22.21
П38

Рецензенты:

Доцент кафедры «Теоретическая и прикладная механика», кандидат технических наук, доцент «Поволжского филиала Московского государственного университета путей сообщения» *А.П. Маштаков*

Доцент кафедры «Детали машин, подъемно-транспортные машины и сопротивление материалов», кандидат технических наук, доцент ФГБОУ ВПО «Саратовский ГАУ» *В.В. Криловецкий*

П38 **Теоретическая механика**: краткий курс лекций для студентов I курса направление подготовки 23.03.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы» / Сост.: М.Г. Загоруйко, А.М. Марадудин, А.В. Перетятько, А.А. Леонтьев // ФГОУ ВО «Саратовский ГАУ». – Саратов, 2016. – 90 с.

Краткий курс лекций по дисциплине «Теоретическая механика» составлен в соответствии с рабочей программой дисциплины и предназначен для студентов направления подготовки 23.03.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы». Содержит основные сведения по разделам теоретической механики «Статика» и «Кинематика». Направлен на формирование у студентов профессиональных компетенций, необходимых для эффективного использования основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности при решении различных инженерных задач.

УДК 531.1
ББК 22.21

Введение

Теоретическая механика – фундаментальная естественнонаучная дисциплина, лежащая в основе современной техники и являющаяся наукой, в которой изучаются перемещения тел с течением времени (т.е. механические движения). На материале курса теоретической механики базируются такие важные для общего инженерного образования дисциплины, как «Сопротивление материалов», «Теория механизмов и машин», «Детали машин и основы конструирования», «Теория наземных транспортно-технологических машин» и др., а также большое число специальных инженерных дисциплин, посвящённых изучению движения как отдельных механизмов, так и машин в целом, а также разработке методов расчёта и эксплуатации таких объектов, как промышленные и гражданские здания, мосты, тоннели, плотины, водоводы, трубопроводы и многое другое.

Краткий курс лекций по дисциплине «Теоретическая механика» (разделы «Статика» и «Кинематика») предназначен для студентов направления подготовки 23.03.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы». Раздел «Статика» рассматривает понятие силы и условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил. Раздел «Кинематика» раскрывает геометрические свойства движения тел без учета их инертности (массы) и действующих на них сил. Данные разделы являются, с одной стороны, введением в следующий раздел теоретической механики «Динамика», а с другой стороны, имеют самостоятельное практическое значение, например, при изучении передач движения в механизмах или расчете плоских ферм. Курс нацелен на формирование у студентов и профессиональных компетенций, необходимых для эффективного использования основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности при решении различных инженерных задач.

<u>Раздел 1. СТАТИКА</u>

Лекция 1

СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

1.1. Предмет статики и ее основные понятия

Статика – это раздел теоретической механики, в котором изучаются общие свойства сил и условия равновесия внешних сил, приложенных к твердому телу.

Определим основные понятия, встречающиеся в этом разделе.

Под равновесием понимают состояние покоя тела по отношению к другим телам.

Материальное тело – замкнутый объем с определенным количеством материи (вещества), заключенном в этом объеме.

В механике имеют дело только с абсолютно твердыми телами.

Абсолютно твердым телом называется такое материальное тело, расстояние между двумя любыми точками которого всегда остается постоянным.

Материальной точкой называется материальное тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Материальная точка обладает массой и способностью взаимодействия с другими телами.

Механическая система- совокупность материальных точек, положение или движение каждой из которых зависит от положения или движения всех остальных.

Твердое тело может находиться в состоянии покоя или движения определенного характера. Каждое из этих состояний называется ***кинематическим состоянием.***

Способность одного тела выводить другое тело из его кинематического состояния называется ***механическим взаимодействием.***

Важнейшим понятием в Т. М. является понятие силы.

Сила – мера механического взаимодействия тел, определяющая интенсивность и направление этого взаимодействия.

Сила характеризуется тремя элементами: числовым значением (модулем), направлением и точкой приложения. Сила изображается вектором. Прямая, по которой направлена сила, называется ***линией действия силы.***

За единицу силы в системе СИ принимается Ньютон Н , в технической системе сил – 1 кГ, причем 1 кГ≈9,81 Н, а в 1 Н≈0,102 кГ.

Сила возникает как минимум при взаимодействии двух тел. Различают внешние и внутренние силы.

Внешние силы – силы, действующие на тело или механическую систему, со стороны других тел или механических систем.

Внутренние силы – силы, с которыми взаимодействуют точки внутри тела или одной механической системы.

Совокупность нескольких сил, одновременно действующих на тело, называется ***системой сил.***

Системы сил, вызывающие одинаковое кинематическое состояние тела, называются ***эквивалентными.***

Сила, эквивалентная некоторой системе сил, называется ***равнодействующей.***

Система сил, равнодействующая которой равна нулю, называется ***уравновешивающейся системой сил.***

Сила, равная по модулю равнодействующей силе, направленная по линии ее действия в противоположную сторону, называется ***уравновешивающей силой.***

Основной задачей статики является изучение условий равновесия внешних сил, приложенных к абсолютно твердому телу.

1.2. Аксиомы статики

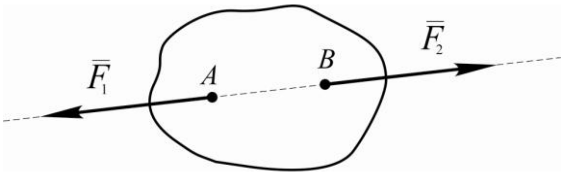
1) *Аксиома инерции.*

Материальная точка (тело) будет находиться в состоянии покоя или прямолинейного равномерного движения только в том случае, если на нее действует система взаимно уравновешивающихся сил.

2) *Аксиома равновесия двух сил.*

Две силы, приложенные к твердому телу, взаимно уравновешиваются только в том случае, если они равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны:

$$F_1 = F_2\,,\ \overline{F}_1 = -\overline{F}_2$$

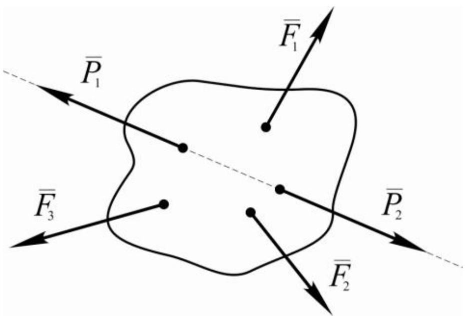


3) *Аксиома присоединения и исключения уравновешивающихся сил.*

Действие системы сил на твердое тело не изменится, если к ней присоединить или из нее исключить систему взаимно уравновешивающихся сил.

Пусть тело находится в определенном кинетическом состоянии под действием сил $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$. Приложим к телу две равные и противоположно направленные силы $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$, которые взаимно уравновешиваются, т. е.

$$P_1 = P_2\,,\ \overline{P}_1 = -\overline{P}_2$$



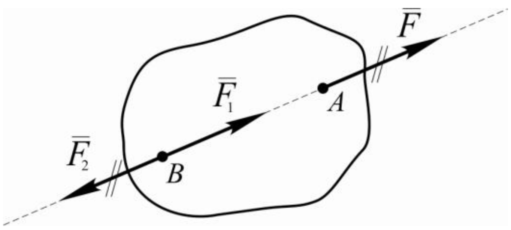
Если тело находилось в покое, то оно сохранит его; если тело было в движении, то оно будет двигаться под действием новой системы сил $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ так же, как под действием сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, т. е. новая система сил эквивалентна прежней.

$$(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2 \text{ и } \vec{F}_3)$$

Следствие 1. Не изменяя кинематического состояния абсолютно твердого тела, силу можно переносить по линии ее действия.

Доказательство.

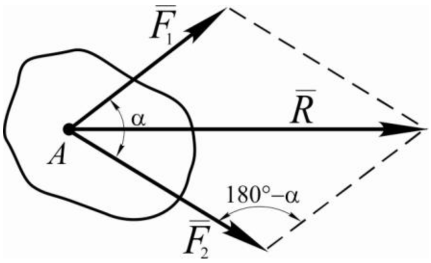
Пусть к т. А твердого тела приложена сила $\vec{F}$



Приложим в т. В две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Причем F_1=F_2, $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Согласно аксиоме 3, кинематическое состояние тела от этого не изменится. Затем исключим силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_2$ как взаимно уравновешивающиеся. Тогда тело будет находиться в том же кинематическом состоянии под действием силы $\vec{F}_1 = \vec{F}$. Поэтому сила в статике рассматривается как скользящий вектор.

4) *Аксиома параллелограмма сил.*

Равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах.



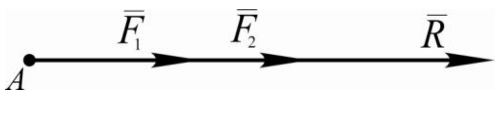
Т.е. $$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$$

Модуль равнодействующей силы определяется по теореме косинусов.

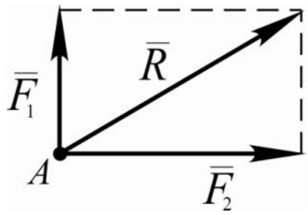
$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}\,,$$

где α – угол между направлениями сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}$.

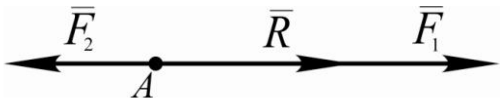
Если $\alpha = 0$, $$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2} = F_1 + F_2.$$



Если $\alpha = 90°$,то $$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}\ .$$



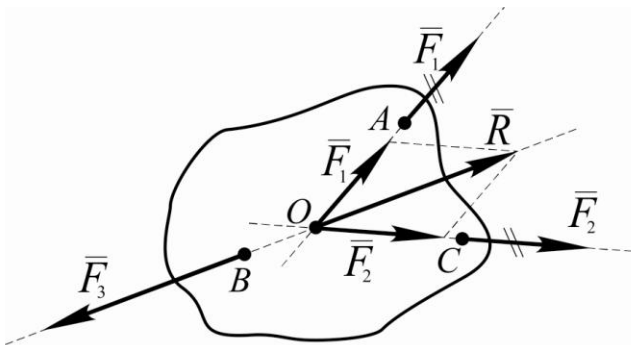
Если $\alpha = 180°$, то $$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2} = F_1 - F_2\,.$$



Следствие 2. ***Теорема о трех непараллельных силах***

Если твердое тело находится в равновесии под действием трех не параллельных сил, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Доказательство.

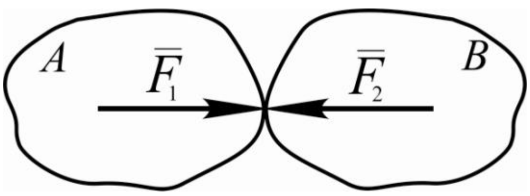


Пусть тело находится в равновесии под действием трех не параллельных сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$.

По аксиоме параллелограмма сил сложим перенесенные в т. О силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, в результате получим равнодействующую этих сил $\vec{R}$. Теперь тело будет находиться под действием двух сил: $\vec{F}_3$ и $\vec{R}$. По аксиоме равновесия 2-х сил $R = -F_3$, R=F_3, а раз так, то силы $\vec{F}_3$ и $\vec{R}$ лежат на одной прямой.

5) *Аксиома равенства действия и противодействия.*

Два материальных тела (точки) действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными по одной прямой в противоположные стороны.



$$F_1 = F_2\,,\ \overline{F}_1 = -\overline{F}_2$$

Этот закон механики показывает, что не может быть одностороннего действия силы, а каждому действию есть противодействие. Следует отметить, что силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ не уравновешиваются, т. к. приложены к разным телам.

6) *Аксиома затвердевания*.

Если деформируемое тело находится в равновесии под действием приложенных сил, то его равновесие не нарушится, если оно отвердеет.

1.3. Связи и их реакции

В природе все тела подразделяются на свободные и несвободные.

Свободным телом называется такое тело, движение которого в пространстве ничем не ограничено.

Несвободным телом называется такое тело, движение которого в пространстве ограничено материальными телами (препятствиями).

Препятствия, тела (ограничения), ограничивающие перемещение данного тела в пространстве, называются ***механическими связями***, наложенными на это тело.

Сила, с которой связь действует на данное тело, препятствуя его перемещению в пространстве, называется ***реакцией связи.***

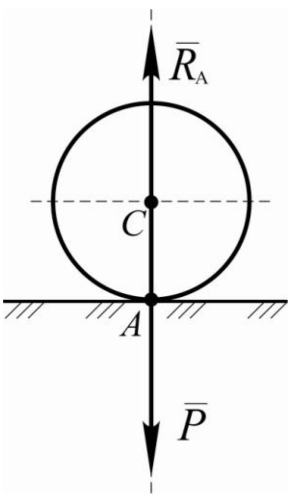
Реакция связи направлена всегда противоположно тому направлению, по которому связь препятствует перемещению тела в пространстве. Т. о. все силы, действующие на тело, можно подразделить на две группы: задаваемые (активные) – F_i и реакции связей (пассивные) – R.

Различают следующие виды связей:

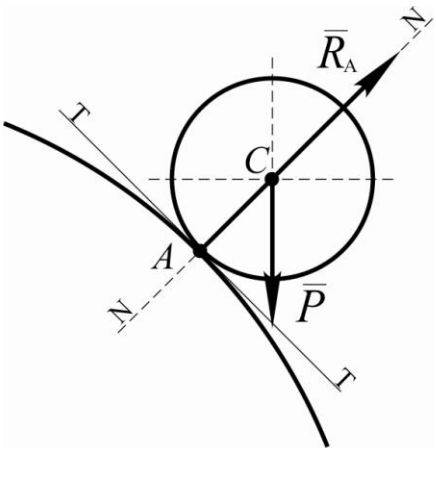
1) *Гладкая поверхность (опора):*

а) абсолютно гладкая горизонтальная плоскость.

Реакция приложена в точке касания по нормали к плоскости.



а

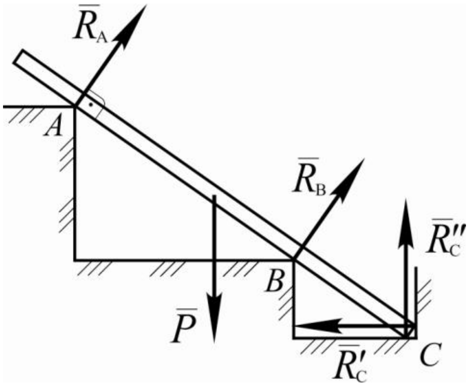


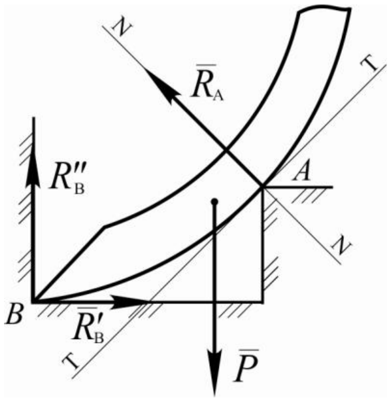
б

б) абсолютно гладкая криволинейная поверхность.

Реакция такой связи направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке.

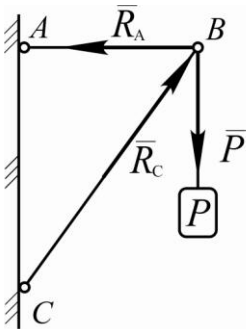
2) *Опорная точка (точечная опора) или частный случай гладкой поверхности.*





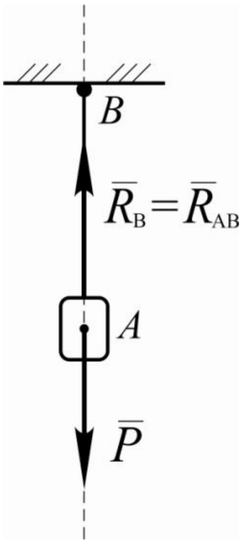
Если опирающаяся поверхность криволинейная, то следует провести касательную к этой поверхности в опорной точке и затем нормаль, которая и определяет направление реакции.

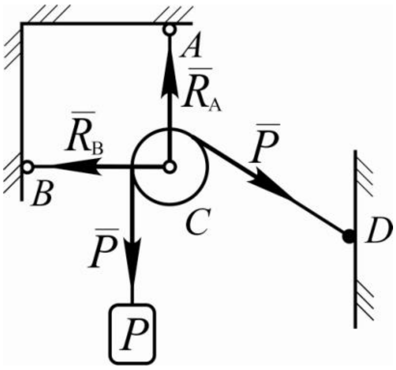
3) Стержневая связь.



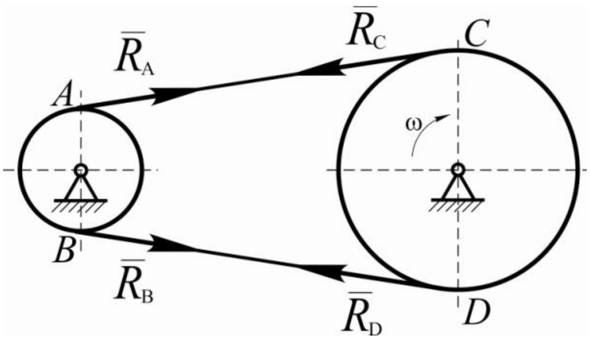
Реакция *невесомого* стержня с шарнирами на концах направляется вдоль оси стержня от рассматриваемого тела (точки), если стержень растянут и к телу - если сжат.

4) *Гибкая связь* (нить, веревка, цепь невесомая и нерастяжимый ремень, канат).

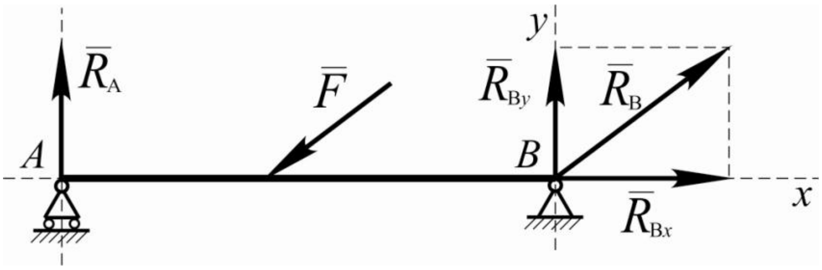


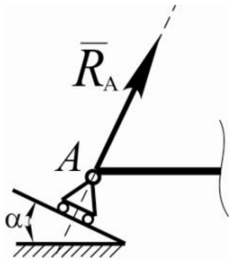


Реакция такой связи направлена всегда вдоль связи от наблюдаемого тела (точки) внутрь связи.



5) *Цилиндрический шарнир (шарнирно-цилиндрическая опора).*



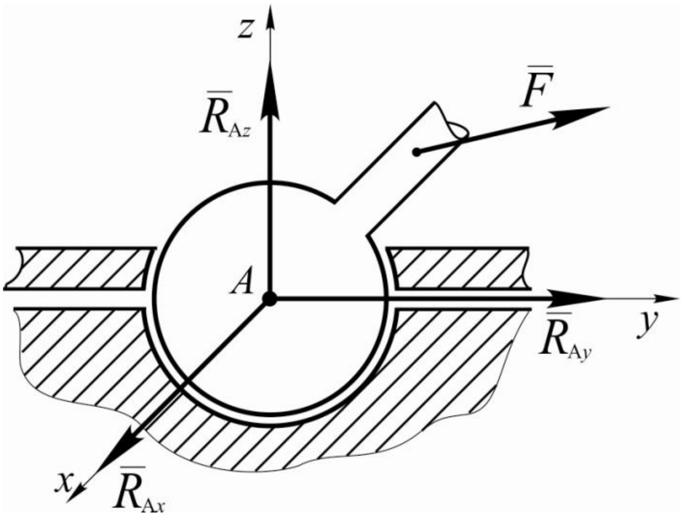


А – шарнирно-цилиндрическая *подвижная* опора, ее реакция всегда перпендикулярна опорной поверхности.

В – шарнирно-цилиндрическая *неподвижная* опора, ее реакция по направлению неизвестна, поэтому ее раскладывают на две составляющие по осям координат: $\overline{R}_{Bx}$ и $\overline{R}_{By}$.

$$R_{\text{B}} = \sqrt{R_{\text{B}x}^2 + R_{\text{B}y}^2}\ .$$

6) *Шаровая опора (пространственная).*



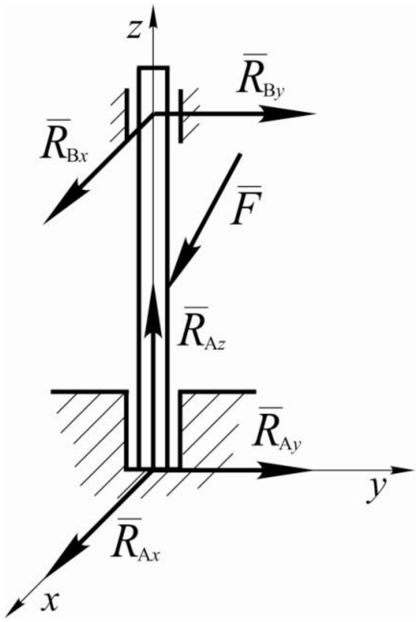
Направление в такой опоре сразу определить нельзя, для ее определения проводят пространственные оси координат и раскладывают полную реакцию опоры на составляющие по 3-м осям: $\overline{R}_{\text{A}x}$, $\overline{R}_{\text{A}y}$, $\overline{R}_{\text{A}z}$.

По модулю $$R_{\text{A}} = \sqrt{R_{\text{A}x}^2 + R_{\text{A}y}^2 + R_{\text{A}z}^2}.$$

Направление $\overline{R}_{\text{A}}$, определяют по направляющим косинусам:

$$\cos(\overline{R}_{\text{A}}; \bar{i}) = \frac{R_{\text{A}x}}{R_{\text{A}}};\ \cos(\overline{R}_{\text{A}}; \bar{j}) = \frac{R_{\text{A}y}}{R_{\text{A}}};\ \cos(\overline{R}_{\text{A}}; \bar{k}) = \frac{R_{\text{A}z}}{R_{\text{A}}}.$$

7) *Подпятник (пространственный упорный подшипник)*



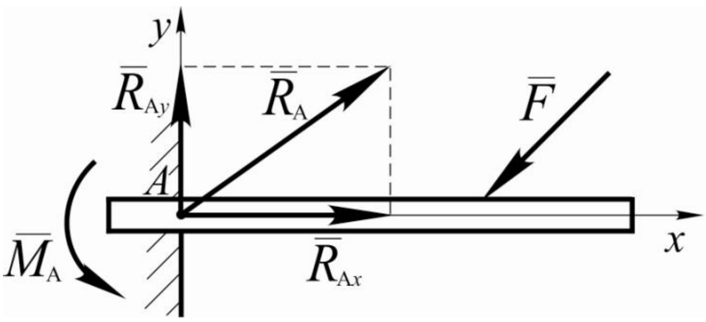
Сразу R_A, определить нельзя, поэтому, вначале определяют: $\overline{R}_{\text{A}x}$, $\overline{R}_{\text{Ay}}, \overline{R}_{\text{Az}}$, а затем

$$R_\text{A} = \sqrt{R_{\text{A}x}^2 + R_{\text{A}y}^2 + R_{\text{A}z}^2}.$$

Направление по направляющим косинусам.

$$\cos(\overline{R}_\text{A}; \bar{i}) = \frac{R_{\text{A}x}}{R_\text{A}};\ \cos(\overline{R}_\text{A}; \bar{j}) = \frac{R_{\text{A}y}}{R_\text{A}};\ \cos(\overline{R}_\text{A}; \bar{k}) = \frac{R_{\text{A}z}}{R_\text{A}}.$$

8) *Жесткая заделка.*



M_A, – реактивный момент.

Реакция жесткой заделки состоит из реактивной силы, направление которой неизвестно, и реактивного момента M_A. При решении задач реактивную силу раскладывают на 2 составляющие по осям координат $\overline{R}_{\text{A}x}$ и $\overline{R}_{\text{Ay}}$

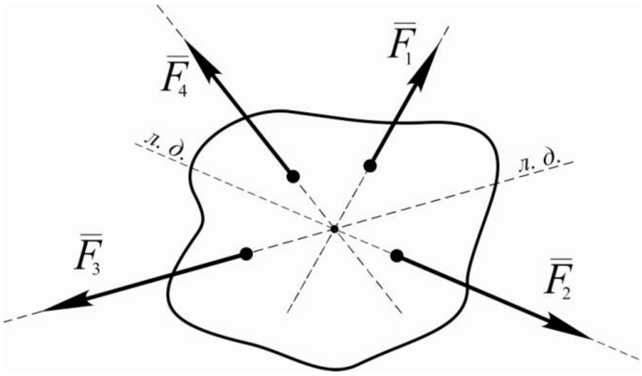
$$R_\text{A} = \sqrt{R_{\text{A}x}^2 + R_{\text{A}y}^2}.$$

1.4. Аксиома связей (принцип освобождаемости от связей)

Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи, наложенные на него, и заменить их действие реакциями этих связей

1.5. Система сходящихся сил на плоскости.

Системой сходящихся сил называется совокупность сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.

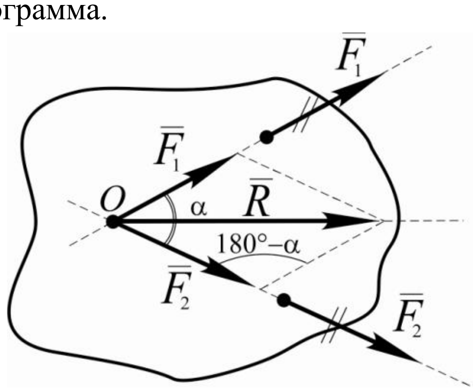


Система сходящихся сил может быть плоской и пространственной.

1.5.1. Сложение двух сходящихся сил

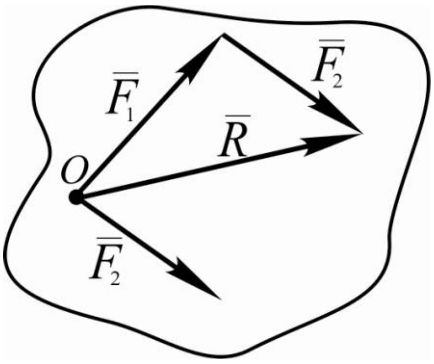
Сложить систему сходящихся сил – значит найти их равнодействующую силу по модулю, направлению и найти точку ее приложения.
Существует два правила сложения 2-х сил:

1) правило параллелограмма.



Если задан угол α, то $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$, т. е. равнодействующая 2-х сходящихся сил является диагональю параллелограмма, построенного на этих силах.

2) правило треугольника.



$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 .$$

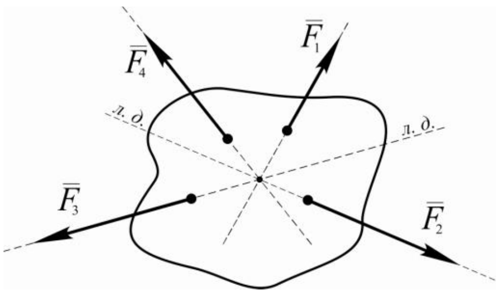
Равнодействующая 2-х сходящихся сил является замыкающей стороной силового треугольника, построенного на этих силах.

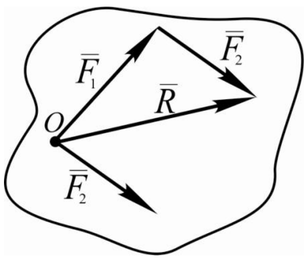
Для определения R используют известные формулы из тригонометрии, для чего в условиях задачи должны быть заданы углы.

1.5.2. Геометрические условия равновесия плоской системы сходящихся сил

Плоская система сходящихся сил будет находиться в равновесии, если их равнодействующая (главный вектор) равна 0, т. е. силовой многоугольник должен быть самозамыкающимся.

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \cdots + \overline{F}_n = 0 \text{ или } \sum \overline{F}_i = 0 .$$



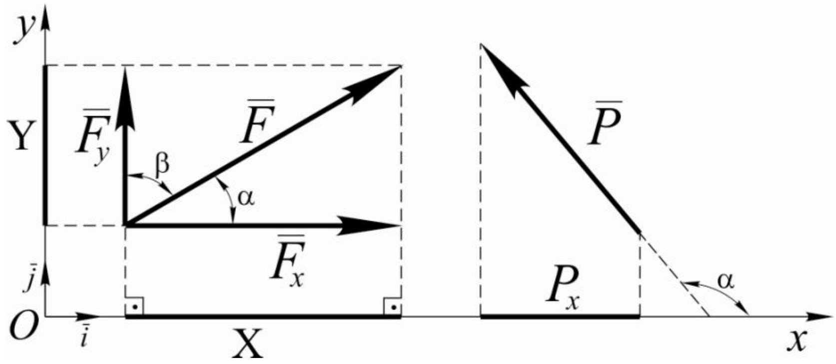


В замкнутом силовом многоугольнике сил все силы направлены по контуру многоугольника в одну сторону по обходу многоугольника.

Частный случай: три сходящиеся силы уравновешиваются, если треугольник этих сил замкнут.

Условие равновесия сходящихся сил, расположенных в пространстве и на плоскости, одно и то же. Однако, графический метод решения задач на систему сходящихся сил практически применяется только для сил, расположенных в одной плоскости.

1.5.2.1. Проекция силы на ось и на плоскость



Проекцией силы на ось называется скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком длине отрезка, заключенного на оси между перпендикулярами, опущенными из конца и начала вектора силы.

$$F_x = F\cos\alpha\,.$$

Проекция силы на ось равна произведению модуля силы на cos угла между положительным направлением оси и направлением вектора силы.

Очевидно, что если $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$, то $F_x > 0$,

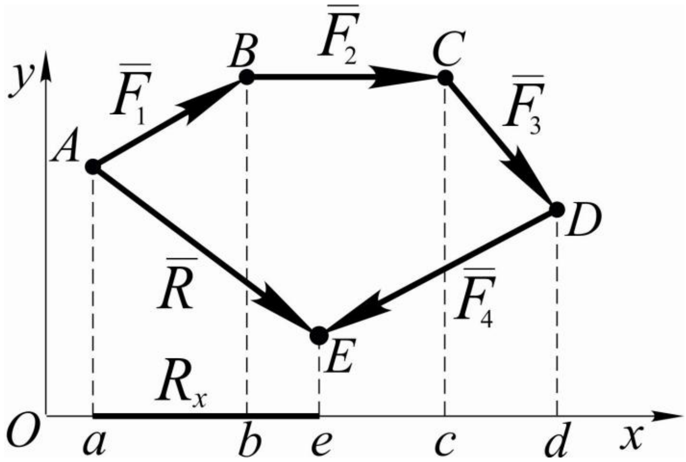
$$\alpha = \frac{\pi}{2},\ \text{то}\ F_x = 0,$$

$$\alpha > \frac{\pi}{2},\ \text{то}\ F_x < 0,$$

1.5.2.2. Теорема о проекции равнодействующей силы на ось. Аналитический способ сложения системы сходящихся сил на плоскости

Проекция равнодействующей некоторой системы сходящихся сил на ось равна алгебраической сумме проекций составляющих сил на ту же ось.

<u>На ось *x*:</u>



Иииии

$$R_x = ae = ab + bc + cd - de = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} - F_{4x}$$

$R_x = \sum F_{ix} = \sum X_i$, где $F_{1x} = X_1$, $F_{2x} = X_2$ и т.д.

Аналогично на ось *y*:

$$R_x = \sum F_{ix} = \sum X_i$$

$$\boxed{\begin{aligned} R_x &= \sum F_{ix} = \sum X_i \\ R_y &= \sum F_{iy} = \sum Y_i \end{aligned}}$$

(1)

1.5.3. Аналитические условия равновесия системы сходящихся сил на плоскости

Известно, что силы взаимно уравновешиваются, если их равнодействующая равна 0, т. е. R=0.

Т. к. $R = \sqrt{\quad X_i^{\ 2} + \quad Y_i^{\ 2}} = 0$, то

$$\boxed{X_i = 0 \text{ и } \quad Y_i = 0} \qquad (2)$$

Т. е. для того, чтобы тело под действием плоской системы сходящихся сил находилось в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций сил системы на оси координат были равны нулю.

Уравнения (1) являются аналитическими условиями равновесия плоской системы сходящихся сил.

1.6. Общая методика решения задач на равновесие сил, приложенных к твердому телу (точке):

1) Выделяют твердое тело (точку), к которому приложена уравновешивающаяся система сил.

2) Показывают все действующие на тело активные (задаваемые) силы.

3) Согласно принципу освобождаемости от связей, действие связей на тело заменяют реакциями.

4) К полученной системе сил применяют условия равновесия, соответствующие этой системе.

5) Из условий равновесия определяют искомые величины.

Вопросы для самоконтроля

1) Основные понятия и аксиомы статики.
2) Связи и реакции связей.
3) Проекция силы на ось.
4) Условия равновесия системы сходящихся сил.
5) Способы определения усилий в стержнях плоской фермы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер . – М. : Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
2. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика [Текст]: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 12-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 672 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1035-4 .
3. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.
4. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике[Текст]: Учебное пособие /И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
5. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная

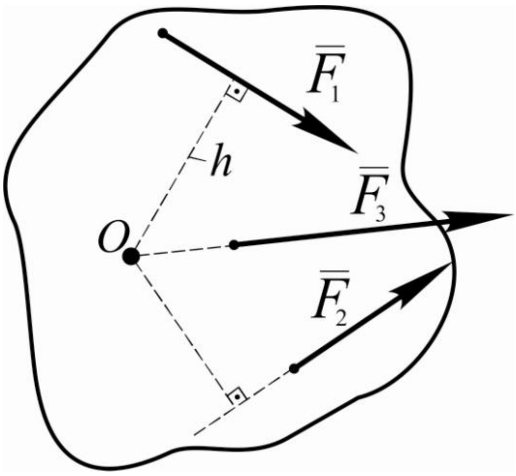
1. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. –Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
2. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
3. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.

Лекция 2

ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

2.1. Момент силы относительно точки.

Под действием силы тело может поворачиваться относительно какого-то центра (точки). В этом случае вращательный эффект силы характеризуется ее *моментом.*



Очевидно, что в этом случае эффективность действия силы будет зависеть от модуля силы F_1 и кратчайшего расстояния от линии действия силы до центра т. О.

1) Таким образом, ***моментом силы относительно выбранного центра (точки) на плоскости*** называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на плечо.

2) ***Плечом силы*** называется перпендикуляр, опущенный из точки (центра), относительно которой рассматривается (берется) момент силы, на линию действия силы.

Момент силы служит для количественной оценки вращательного эффекта силы.

3) Момент силы F относительно центра O будем обозначать символом $m_0(F)$. Следовательно,

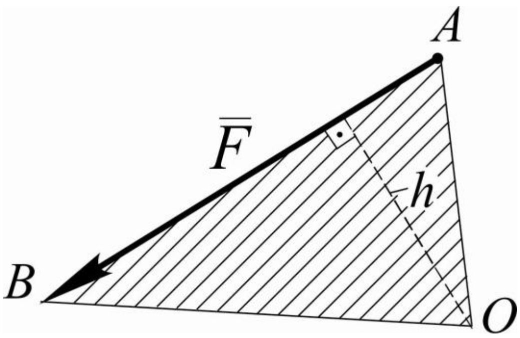
$$\boxed{m_0 \;\; F \;\; = \pm F \cdot h} \qquad (1)$$

В дальнейшем условимся считать, что момент имеет знак *плюс*, если сила стремится повернуть тело вокруг центра против хода часовой стрелки, и знак *минус,* – если по ходу.

Момент силы относительно некоторого центра равен нулю, если линия действия этой силы проходит через этот центр.

Момент силы относительно некоторого центра не изменится, если силу перенести по линии ее действия в любое другое место.

2.2.1. Выражение момента силы с помощью площади треугольника.



Дана сила F и центр О. Определим площадь Δ ABO.

$$S_{\Delta\,ABO}=\frac{1}{2}F\cdot h\rightarrow\quad 2S_{\Delta\,ABO}=F\cdot h.$$

Сравним с выражением момента силы F.

$$m_0\ F\ =F\cdot h.$$

Из сравнения получим

$$\boxed{m_0\ F\ =2S_{\Delta\,ABO}}$$

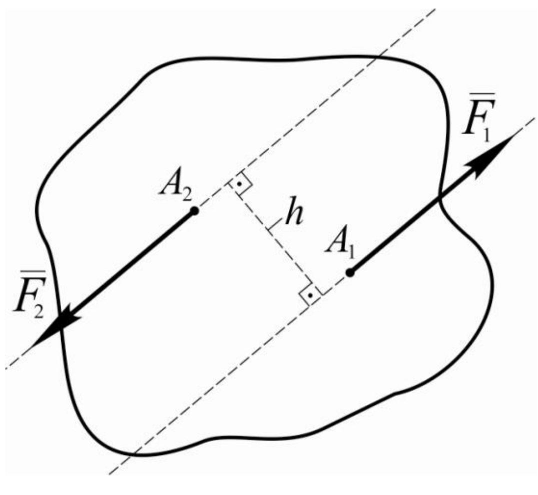
Момент силы относительно некоторой точки выражается удвоенной площадью Δ, основанием которого является вектор силы, а высотой – плечо силы относительно заданной точки.

2.2.2. Теорема о моменте равнодействующей силы (теорема Вариньона).

Момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно некоторого центра, лежащего в плоскости действия сил, равен алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно того же центра.

2.3. Теория пар сил на плоскости.

2.3.1. Пара сил. Момент пары.



Парой сил называется две равные по модулю параллельные, но противоположно направленные силы. $F_1 = F_2$, $F_1 = -F_2$. $(F_1; F_2)$ – пара сил.
$F_1 + F_2 = R = 0$ – однако, под действием пары сил тело не находится в равновесии – *оно вращается*.

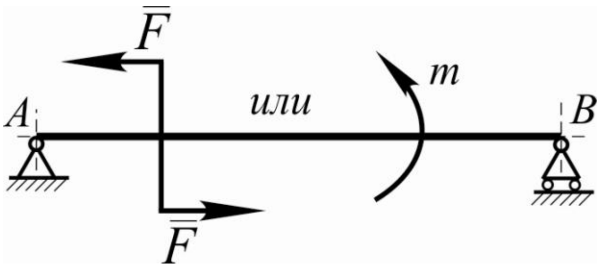
Эффективность вращательного действия пары сил выражается *моментом пары.*

Момент пары сил равен произведению модуля одной из сил на плечо пары и берется со знаком плюс, если пара стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, и со знаком минус – если по ходу.

Плечом пары называется кратчайшее расстояние между линиями действия сил, образующих пару.

Т. о. $\boxed{m_0\ F_1;\ F_2\ = F_1 \cdot h = F_2 \cdot h}$

Пара сил обозначается следующим образом:



Момент пары учитывается только в уравнении моментов.

2.3.2. Условия равновесия плоской системы пар.

Если момент результирующей пары М=0, то твердое тело будет находиться в равновесии, при этом

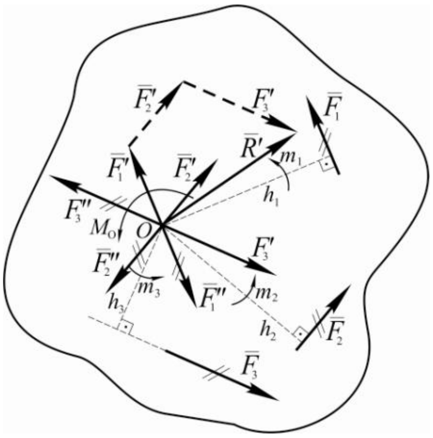
$$\boxed{\Sigma m_i = 0}$$

Для равенства плоской системы пар необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов пар системы была равна нулю.

2.4. Приведение произвольной плоской системы сил к заданному центру.

Совокупность сил, расположенных на плоскости как угодно, называется ***произвольной плоской системой сил.***

Пользуясь теоремой Пуансо, можно любую произвольную плоскую систему сил привести к произвольно выбранному центру.



Пусть имеется произвольная плоская система сил $F_1, \; F_2, F_3$.

Выберем произвольно центр приведения (т. О).

$$F_1 = F_1' = F_1'' \,,$$
$$F_1 = F_1' = -F_1'' \,,$$
$$F_2 = F_2' = F_2'' \,,$$
$$F_2 = F_2' = -F_2'',$$
$$F_3 = F_3' = F_3'',$$
$$F_3 = F_3' = -F_3'' \,.$$

Сложим все силы, обозначенные одним штрихом:

$$F_1' + F_2' + F_3' = R' = \Sigma F_i'$$

Или $\boxed{R' = \Sigma F_i'}$ – главный вектор произвольной плоской системы сил.

Главный вектор приложен в центре приведения, причем его величина и направление не зависят от места выбора центра приведения, т. к. сложение геометрическое.

Вопросы для самоконтроля

1) Момент силы относительно точки на плоскости.
2) Пара сил и ее основные свойства.
3) Момент пары сил.
4) Приведение плоской системы сил к данному центру (метод Пуансо).
5) Главный вектор и главный момент.
6) Частные случаи приведения произвольной плоской системы сил.
7) Аналитические условия равновесия произвольной плоской системы сил.
8) Теорема Вариньона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер . – М. : Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
2. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика [Текст]: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 12-е изд., стер .

– СПб. : Лань, 2013 . – 672 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1035-4 .
3. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.
4. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике[Текст]: Учебное пособие /И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
5. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная

1. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. –Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
2. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
3. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.

Лекция 3

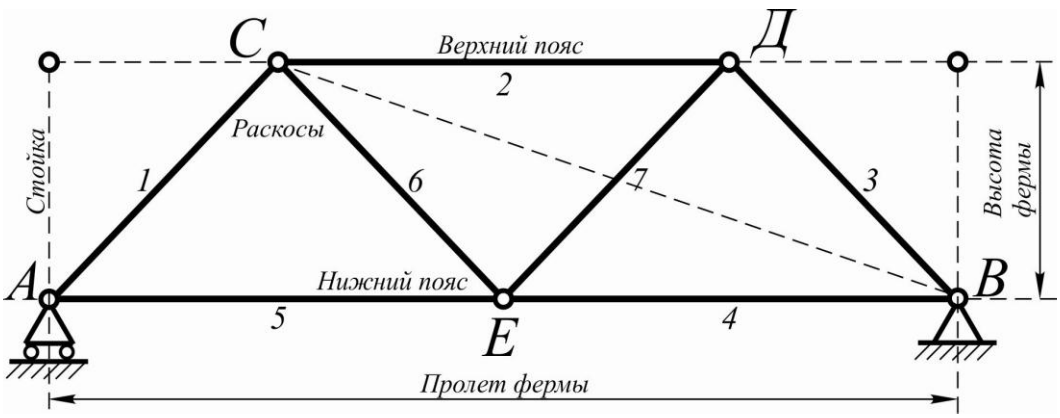
ФЕРМЫ

3.1. Понятие о ферме. Статическая определимость ферм.

Фермой называется жесткая конструкция, состоящая из прямолинейных стержней, соединенных между собой шарнирами.

Точки, где сходятся оси стержней, называются ***узлами.***

Те узлы, которыми ферма опирается на основание, называются ***опорными узлами.***



Вертикальные стержни называются ***стойками***, а наклонные - ***раскосами.***

Стержни, расположенные по верхнему контуру, образуют ***верхний пояс***, а расположенные по нижнему контуру - ***нижний пояс*** фермы.

Если оси всех стержней фермы лежат в одной плоскости, то ее называют ***плоской фермой.***

Для упрощения расчетов ферм вводятся следующие допущения:

1) Крепление стержней шарнирное.

2) Трение в шарнирах отсутствует.

3) Весом стержней пренебрегают.

4) Все нагрузки сосредоточены в узлах фермы.

Ферма с такими допущениями называется ***теоретической.*** В такой ферме каждый стержень будет испытывать только усилие сжатия или растяжения.

Реальные фермы не имеют таких идеальных шарниров, однако, такое допущение облегчает вычисление усилий в стержнях фермы.

Если, при снятии с фермы хотя бы одного стержня, она теряет свою жесткость, то эта ферма без лишних стержней.

Ферма без лишних стержней должна удовлетворять следующему условию:

$$\boxed{m = 2n - 3}$$

где: m- число стержней, n- число узлов.

Если, при снятии с фермы одного или нескольких стержней, она не теряет свою жесткость, то эта ферма с лишними стержнями. В этом случае

$$\boxed{m > 2n - 3}$$

Такие фермы имеют повышенную металлоемкость при той же жесткости.

Если $m < 2n - 3$, то фермы нет, а есть геометрически изменяющаяся конструкция.

Расчет фермы заключается в определении опорных реакций и усилий в стержнях.

При этом опорные реакции и заданные нагрузки, действующие на ферму, являются внешними силами, а усилия в стержнях - внутренними.

Если все неизвестные опорные реакции и усилия в стержнях могут быть определены из уравнений статики, то ферма называется ***статически определимой, в противном случае - нет.***

Условие статической определимости фермы имеет вид:

$$\boxed{m = 2n - 3}$$

где: m- число стержней, n - число узлов.

Т. е. статически определимая ферма - ферма без лишних стержней.

3.2. Расчет плоских ферм.

Расчет плоских ферм в общем случае ведут в следующей последовательности:

1) Проверяют статическую определимость фермы.

2) Выполняют схему фермы, на которой нумеруют все стержни и обозначают буквами узлы, к которым прикладывают задаваемые силы.

3) Выбирают систему координат и, применяя к ферме принцип освобождаемости от связей, определяют опорные реакции, пользуясь аналитическими условиями равновесия произвольной плоской системы сил.

4) Определяют усилия в стержнях методом вырезания узлов или методом сквозных сечений.

3.2.1. Определение усилий в стержнях фермы методом сквозных сечений (способ Риттера).

1) Мысленно рассекают ферму сквозным сечением на две части так, чтобы в сечение попало не более 3-х стержней с неизвестными усилиями.

2) Отбрасывают любую из частей фермы и изображают оставшуюся часть, показывают все действующие на нее силы, при этом реакции перерезанных стержней направляют от узлов фермы.

3) Выбрав систему координат, составляют уравнения равновесия сил, действующих на оставшуюся часть:

$$\Sigma x_i = 0; \quad \Sigma y_i = 0; \quad \Sigma m_p(F_i) = 0; \text{ или}$$

$$\Sigma x_i = 0; \quad \Sigma m_{p1}(F_i) = 0; \quad \Sigma m_{p2}(F_i) = 0.$$

При этом уравнения моментов необходимо в первую очередь составлять относительно точек Риттера - точек, где пересекаются линии действия неизвестных реакций перерезанных стержней.

4) Решая совместно уравнения равновесия, определяют реакции перерезанных стержней.

5) По найденным реакциям определяют усилия в стержнях. Если у найденной реакции перерезанного стержня знак (+), то стержень растянут, если (-)- то сжат.

6) Делают следующее сквозное сечение и повторяют расчет. Результаты сводят в таблицу.

3.2.2. Определение усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов.

1) Мысленно вырезают узел фермы, в котором сходятся не более 2-х стержней с неизвестными усилиями.

2) Изображают отдельно этот узел и показывают все действующие на него силы. При этом реакции отброшенных стержней направляют от узла, считая, что все стержни работают на растяжение.

3) Выбирают систему координат и показывают углы между векторами сил и осями координат.

4) Составляют уравнения равновесия для сходящихся в узле сил:

$$\Sigma x_i=0;$$

$$\Sigma y_i=0.$$

5) Из полученных уравнений равновесия определяют неизвестные реакции стержней. Если при этом реакция стержня получится со знаком «+», то данный стержень *растянут*, а если «–», то *сжат*. Следует учесть, что найденные реакции стержней численно равны усилиям в стержнях и имеют противоположные им направления.

6) Таким же образом вырезают последующие узлы фермы и определяют усилия в остальных стержнях. Результаты сводят в таблицу.

Вопросы для самоконтроля

1). Статическая определимость ферм.

2). Методы определения усилий в стержнях фермы.

3). Способ Риттера

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер . – М. : Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
2. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика [Текст]: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 12-е изд., стер .

– СПб. : Лань, 2013 . – 672 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1035-4 .

3. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.
4. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике[Текст]: Учебное пособие /И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
5. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная

1. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. –Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
2. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
3. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.

Лекция 4

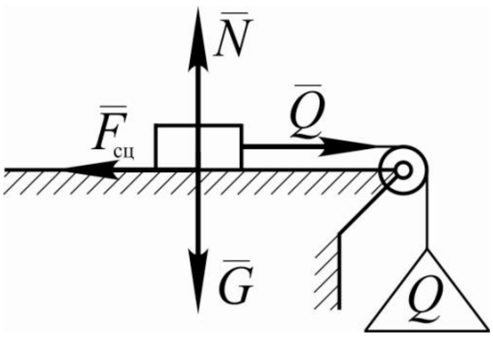
ТРЕНИЕ

4.1. Понятие о силе трения скольжения. Законы трения скольжения.

Впервые явлением трения занимался Леонардо да Винчи, затем французские физики Амонтон (1663-1705) и Кулон (1776-1806), который сформулировал законы трения.

Как показывают опыты, при стремлении двигать одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила, препятствующая их относительному движению, называемая ***силой трения скольжения.***

Возникновение этой силы обусловлено в первую очередь шероховатостью поверхностей и наличием сцепления у прижатых друг к другу тел.



Следует различать трение, имеющее место при относительном покое тел (статическое трение или трение покоя), и трение при относительном движении (динамическое трение или трение движения).

Опытами установлены следующие закономерности, называемые законами трения скольжения:

1) При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила трения или сила сцепления, величина которой может принимать любые значения от нуля до значения, называемого ***предельной силой трения***, т. е.

$$0<F_{сц} \le F_{пр}.$$

Сила трения направлена в сторону, противоположную той, куда действующие силы стремятся сдвинуть тело.

2) Величина предельной силы трения равна произведению статического коэффициента трения на нормальное давление.

$$F_{пр} = f_0 \cdot N,$$

где f_0- коэффициент трения покоя, статический коэффициент трения, коэффициент сцепления. f_0- безразмерная величина, определяется опытным путем как $f_0 = \frac{F_{пр}}{N}=\frac{Q}{N}$ и зависит от материала соприкасающихся тел и состояния поверхности (обработка, наличие смазки, влажность, температура и т. п.). f_0 берут из таблиц.

Для дерева: f_0=0,4…0,7.

Металл по металлу: f_0=0,15…0,25.

Сталь по льду: f_0=0,027.

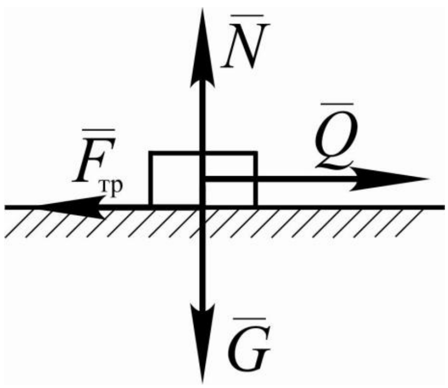
3) Величина предельной силы трения в широких пределах не зависит от площади контакта трущихся поверхностей.

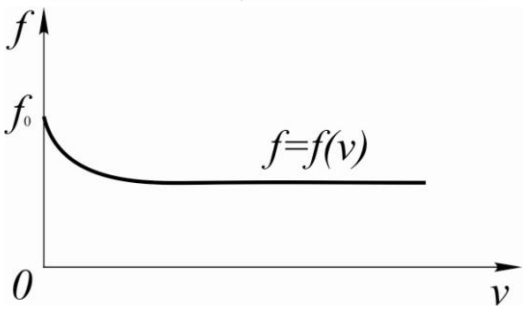
Следует иметь в виду, что пока груз находится в покое, сила сцепления $F_{сц}$ равна сдвигающей силе Q, а не величине $F_{пр} = f_0 \cdot N$. Значение $f_0 \cdot N$ сила сцепления принимает только тогда, когда положение равновесия становится предельным.

Все изложенное относилось к трению скольжения при покое.

При движении $Q \geq F_{пр}$. Возникающая при этом предельная сила сцепления называется ***силой трения скольжения*** $F_{тр}$. Эта сила направлена противоположно движению, и равна произведению динамического коэффициента трения на нормальное давление, т. е.

$$F_{тр}=f \cdot N,$$





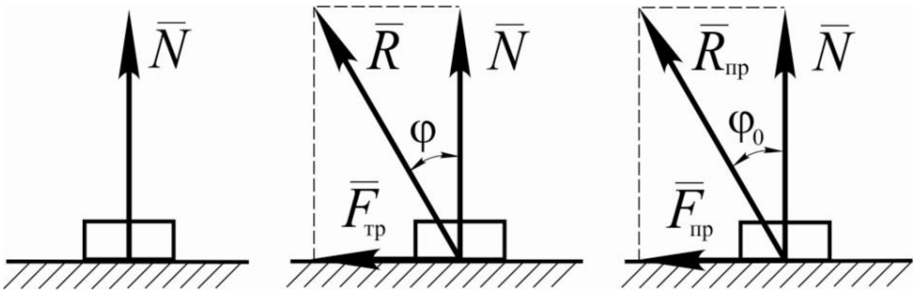
f– определяется опытным путем, зависит от материала трущихся поверхностей, состояния их поверхностей и в некоторой степени о скорости относительного движения.

$f < f_0$ – *установлено экспериментально.*

f – еще носит название ***коэффициента трения движения или скольжения.***

4.2. Угол и конус трения.

Реакция шероховатой поверхности (реальной) R (2) в отличии от идеальной (гладкой) (1) будет слагаться из двух составляющих: нормальной реакции N и силы трения $F_{\text{тр}}$.



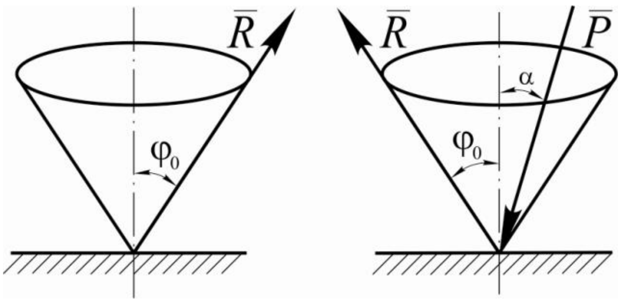
1 2 3

Полная реакция R будет отклонена от нормали на некоторый угол φ. При изменении силы трения от нуля до $F_{\text{пр}}$ (3) , сила R будет меняться от N до $R_{\text{пр}}$, а ее угол с нормалью будет расти от нуля до предельного значения φ_0.

Наибольший угол φ_0, который полная реакция шероховатой поверхности образует с нормалью к этой поверхности, называется ***углом трения сцепления.***

$$\tan\varphi_0 = \frac{F_{\text{пр}}}{\text{N}} = \frac{f_0 \cdot N}{\text{N}} = f_0$$

Т. о. *коэффициент трения сцепления (покоя) представляет собой тангенс угла трения, а угол трения представляет собой угол, тангенс которого равен коэффициенту трения сцепления.*



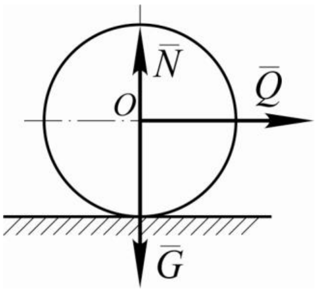
Если φ_0>α, то покой.

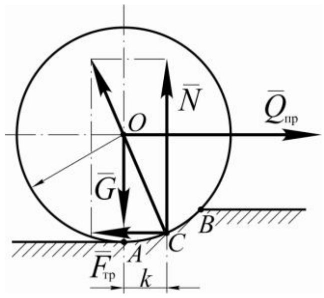
Если φ_0<α, то движение.

R – может иметь различное направление в зависимости от действующей силы Q.

4.3. Понятие о силе трения качения. Коэффициент трения качения.

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.





Трение качения возникает вследствие деформации тел. Так в результате качения цилиндра, при действии силы Q, интенсивность давлений у края А убывает, а у края В возрастает. В результате реакция N, являющаяся нормальной составляющей равнодействующей реактивных сил, оказывается смещенной в сторону действия силы Q. С увеличением Q, это смещение растет до некоторой предельной величины k. Т. о. в предельном положении на каток будут действовать пара $(Q_{\text{пр}1}; F_{\text{тр}})$ с моментом $Q_{\text{пр}} \cdot r$ и уравновешивающая ее пара $(N; P)$ с моментом N·k. Находим

$$Q_{\text{пр}} = \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{k}}{r} \qquad (1)$$

Пока Q< $Q_{\text{пр}}$, каток находится в покое;
при Q> $Q_{\text{пр}}$, начинается качение.
Т. к. $Q_{\text{пр}}$= $F_{\text{тр.к.}}$, то

$$\boxed{F_{\text{тр.к.}} = \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{k}}{r}} \qquad (2)$$

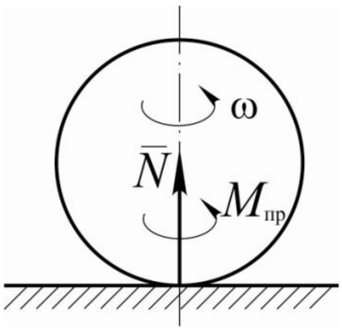
Сила трения качения прямо пропорциональна нормальному давлению и обратно пропорциональна радиусу колеса. Линейная величина k, входящая в формулу (1), называется ***коэффициентом трения качения.*** Измеряют величину k обычно в см. Значение k зависит от материала тел и определяется опытным путем.

Колесо по рельсу (сталь по стали)- k=0,005 см.

Сталь закаленная по стали (подшипник)- k=0,001 см.

Отношение k/r обычно значительно меньше статического коэффициента трения f_0. Поэтому в технике, когда это возможно, стремятся заменить трение скольжения трением качения.

Кроме трения качения встречается трение верчения.



Шар начинает вращаться тогда, когда М>$M_{\text{пр}}$, где $M_{\text{пр}}$=λ·N=$M_{\text{верч}}$, где λ- коэффициент трения верчения. λ≈0,1k≈(0,1…0,2)k.

Вопросы для самоконтроля

1) Трение скольжения.
2) Угол, конус трения.
3) Трение качения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер . – М. : Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
2. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика [Текст]: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 12-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 672 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1035-4 .
3. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.
4. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике[Текст]: Учебное пособие /И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
5. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная

1. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. –Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
2. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
3. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.

Лекция 5

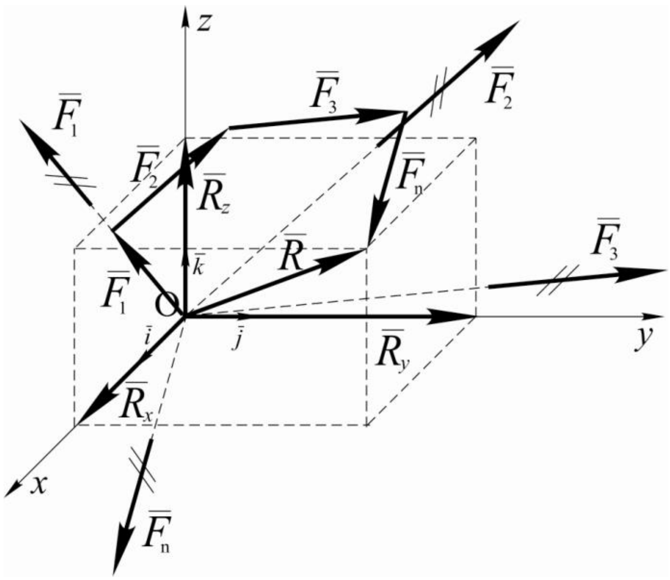
ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

5.1. Система сходящихся сил в пространстве

Системой сходящихся сил в пространстве называется такая совокупность сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, но не лежат в одной плоскости.

5.1.1. Геометрический способ сложения системы сходящихся сил в пространстве. Геометрические условия равновесия системы сходящихся сил в пространстве.

Возьмем пространственную систему сходящихся сил F_1, F_2, F_3,…, F_n.
$R = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = \Sigma F_i$.



$\boxed{R = \Sigma F_i}$ – вектор равнодействующей силы.

Т.о. равнодействующую систему сходящихся сил в пространстве можно определить по правилу силового многоугольника. В этом случае равнодействующая система сходящихся сил в пространстве будет выражаться результирующим вектором в силовом многоугольнике, построенном на этих силах, проведенного из начала первого вектора в конец последнего.

В случае уравновешивающейся системы сил, пространственный силовой многоугольник, построенный на силах системы, должен быть самозамыкающимся, т. е. в этом случае R=0, а следовательно

$$\boxed{\Sigma F_i = 0} \qquad (1)$$

Условие (2) является геометрическим условием равновесия системы сходящихся сил в пространстве. Пользоваться этим условием геометрической точки зрения не целесообразно. Более предпочтительней аналитический способ сложения.

5.1.2. Аналитический способ сложения системы сходящихся сил в пространстве (см. предшествующий рисунок)

$\imath$, $\jmath$, k- осевые орты.

По теореме о проекции равнодействующей силы на ось будем иметь:

$$R_x = \Sigma x_i\ ;\ R_y = \Sigma y_i;\ \ R_z = \Sigma z_i.$$

По известным проекциям равнодействующей силы на координатные оси определим модуль (величину) равнодействующей силы по правилу параллелепипеда:

$$\boxed{R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\Sigma x_i)^2 + (\Sigma y_i)^2 + (\Sigma z_i)^2}} \qquad (2)$$

Направление равнодействующей силы определяют по направляющим косинусам

$$\cos\ R;\imath\ = \frac{R_x}{R};\quad \cos\ R;\jmath\ = \frac{R_y}{R};\ \cos\ R;k\ = \frac{R_z}{R}. \qquad (3)$$

5.1.3. Аналитические условия равновесия пространственной системы сходящихся сил. Метод двойного проектирования.

В случае уравновешивающейся системы сил R=0, следовательно

R= $\sqrt{(\Sigma x_i)^2 + (\Sigma y_i)^2 + (\Sigma z_i)^2}$=0

Откуда

$\boxed{\begin{matrix}\Sigma x_i = 0\\ \Sigma y_i = 0\\ \Sigma z_i = 0\end{matrix}}$ – аналитические условия равновесия пространственной системы сходящихся сил.

Для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил системы на каждую из 3-х координатных осей была равна нулю.

5.2.Произвольная пространственная система сил.
5.2.1.Момент силы относительно точки как вектор.

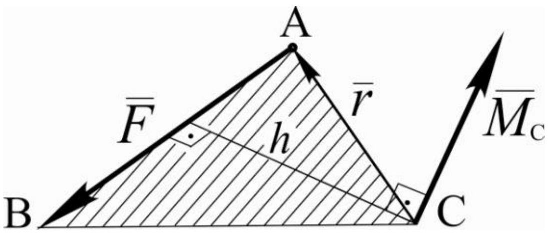
Момент силы относительно точки полностью определяется следующими тремя факторами:

1) численным значением;

2) плоскостью действия;

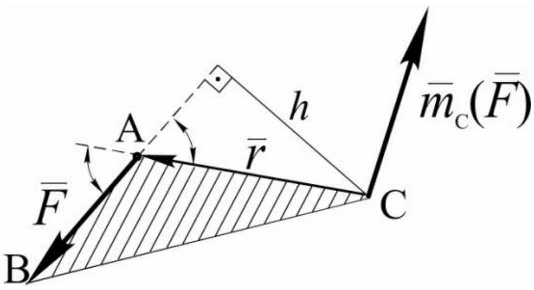
3) направлением вращения под действием момента силы в данной плоскости.

Условимся момент силы относительно точки изображать вектором, исходящим из этой точки, модуль которого равен произведению модуля силы на ее плечо. Этот вектор всегда направлен перпендикулярно плоскости действия момента силы в ту сторону, откуда поворот под действием силы вокруг данной точки будет виден происходящим против хода часовой стрелки.



$m_c \;\; F \;\; = M_c$ - вектор момента силы F относительно точки С.
$M_c = m_c \;\; F$ =F·h- модуль вектора момента силы.

5.2.2.Выражение момента силы относительно точки с помощью векторного произведения двух векторов



Запишем векторное произведение двух векторов:

$$r \cdot F \;\; = r \cdot F \cdot \sin(r; F)$$

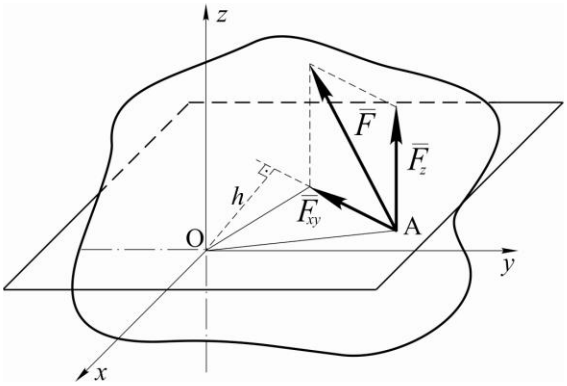
Но r·$\sin(r; F)$=h, значит $r \cdot F$ =F·h=$m_c \;\; F$.

Таким образом

$$\boxed{m_c \;\; F \;\; = r \cdot F}.$$

Т. е. момент силы относительно некоторой точки равен векторному произведению радиуса-вектора, проведенного из данной точки в точку приложения силы на вектор силы.

5.2.3. Момент силы относительно оси



Имеем твердое тело с вертикальной осью z. К произвольной точке А приложена сила F.

Проведем через точку А плоскость, перпендикулярную оси z. Разложим силу F на две составляющие F_z и F_{xy} - проекцию силы F на плоскость xoy.

$$F = F_z + F_{xy}$$

По теореме Вариньона (о моменте равнодействующей силы) будем иметь:

$$m_z\ F = m_z\ F_z\ + m_z(F_{xy}), \text{ но } m_z\ F_z\ = 0,$$

т. к. сила F_z не производит вращающего действия вокруг оси z.

Тогда

$$m_z\ F\ = m_z(F_{xy}) = m_0\ F_{xy}\ = F_{xy} \cdot h$$

Т. о.

$$\boxed{m_z\ F\ = F_{xy} \cdot h}.$$

Моментом силы относительно некоторой оси называется величина, численно равная моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную к оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью. По модулю этот момент равен произведению проекции силы на плоскость на плечо этой проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Момент силы относительно оси считается положительным, если, посмотрев с положительного конца оси, поворот тела под действием данной силы вокруг этой оси будет виден происходящим против хода часовой стрелки, и отрицательным, если по ходу.

При определении момента силы относительно оси, возможны следующие частные случаи:

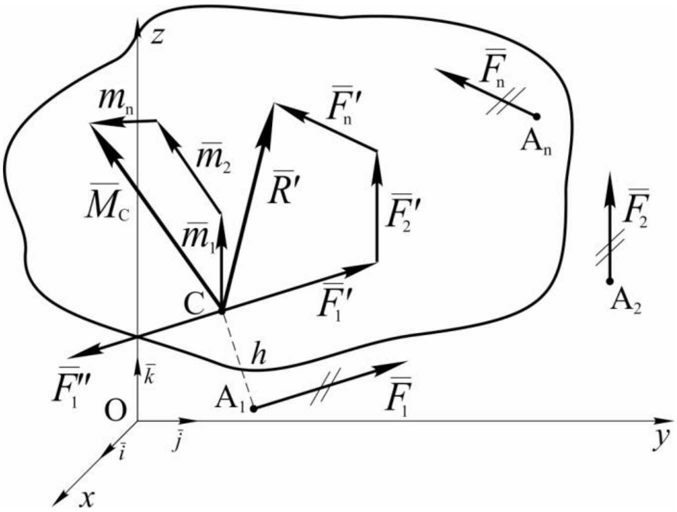
1) Если сила параллельна оси, то момент такой силы относительно этой оси равен нулю.

2) Если линии действия силы пересекаются с осью, то момент такой силы относительно данной оси равен нулю.

3) Если сила лежит в плоскости, перпендикулярной оси, то ее момент относительно оси определяется как момент силы относительно точки пересечения оси с плоскостью.

5.3. Приведение произвольной пространственной системы сил к одному центру (сложение пространственной системы сил).

Имеем твердое тело с приложенной к нему произвольной пространственной системой сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Требуется сложить эти силы, т. е. привести к одному центру.



т. С – произвольно выбранный центр приведения. Ставится задача сложить силы F_1, F_2, …, F_n. Для этого воспользуемся известным для плоской системы сил методом Пуансо, рассматривая каждую силу в плоскости ее действия.

Переносим силу F_1 в точку С. $F_1 = F_1'$=F_1'', но $F_1' = -F_1''$. Рассматриваем полученные три силы как F_1' - вектор силы F_1, перенесенный в точку С, а (F_1; F_1'') – пару сил с моментом m_1.

Аналогично выполняя приведения к данному центру С остальных сил в их плоскостях действия, получим векторы F_2' и F_n', приложенные в точке С и m_2 и m_n - вектор – моменты соответствующих сил, приложенные в т. С и лежащие также в разных плоскостях.

В результате приведения (сложения) получим главный вектор

$$R'=F_1' + F_2'+\ldots+F_n' \text{ или}$$

$$\boxed{R' = \Sigma F_i} \qquad (4)$$

и главный момент $M_c = m_1+ m_2+\ldots+ m_n$ или

$$\boxed{M_c = \Sigma m_c \ F_i} \qquad (5)$$

Т.о. ***главный вектор*** произвольной пространственной системы сил равен геометрической сумме всех сил, приложенных в центре приведения. При этом величина и направление главного вектора не зависят от выбора центра приведения, т. к. сложение геометрическое.

Главный момент произвольной пространственной системы сил равен геометрической сумме моментов всех сил системы относительно центра приведения. При этом величина и направление главного момента зависят от выбора центра приведения за счет изменения плеча присоединенных пар.

5.3.1. Определение величины и направления главного вектора и главного момента произвольной пространственной системы сил (см. предшествующий рисунок)

Спроектируем уравнение (1) на выбранные оси неподвижной системы координат yoxz. Тогда получим $R_x^{□}=\Sigma x_i$; $R_y^{□}=\Sigma y_i$; $R_z^{□}=\Sigma z_i$.

По известным проекциям главного вектора можно определить его модуль по правилу параллелепипеда:

$$R^{□} = \sqrt{(\Sigma x_i)^2 + (\Sigma y_i)^2 + (\Sigma z_i)^2}\,. \tag{6}$$

Направление главного вектора $R^{□}$ определяется по направляющим косинусам:

$$\cos\left(R□;\imath\right) = \frac{R□_x}{R□};\quad \cos\left(R□;\jmath\right) = \frac{R□_y}{R□};\ \cos\left(R□;k\right) = \frac{R□_z}{R□}. \tag{7}$$

Аналогично проектируя уравнение (2), будем иметь проекции главного момента:

$$M_x = \Sigma m_{ix} = \Sigma m_x\left(F_\imath\right)$$
$$M_y = \Sigma m_{iy} = \Sigma m_y\left(F_\imath\right)$$
$$M_z = \Sigma m_{iz} = \Sigma m_z\left(F_\imath\right)$$

Модуль главного момента

$$\mathrm{M}= \sqrt{\left(\Sigma m_x\left(F_\imath\right)\right)^2 + \left(\Sigma m_y\left(F_\imath\right)\right)^2 + \left(\Sigma m_z\left(F_\imath\right)\right)^2} \tag{8}$$

Направление главного момента также определяется по направляющим косинусам:

$$\cos\left(M;\imath\right) = \frac{M_x}{M};\quad \cos\left(M;\jmath\right) = \frac{M_y}{M};\ \cos\left(M;k\right) = \frac{M_z}{M}. \tag{9}$$

5.3.2. Аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил

В случае уравновешивающейся системы сил $R^{□}$=0 и M_c=0, следовательно

$$R^{□} = \sqrt{(\Sigma x_i)^2 + (\Sigma y_i)^2 + (\Sigma z_i)^2} = 0$$

$$M_c = \sqrt{\left(\Sigma m_x\left(F_\imath\right)\right)^2 + \left(\Sigma m_y\left(F_\imath\right)\right)^2 + \left(\Sigma m_z\left(F_\imath\right)\right)^2} = 0$$

Откуда получаются следующие аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил:

$$\boxed{\begin{array}{c} 1)\Sigma x_i = 0 \\ 2)\Sigma y_i = 0 \\ 3)\Sigma z_i = 0 \\ 4)\ \Sigma m_x\left(F_\imath\right) = 0 \\ 5)\Sigma m_y\left(F_\imath\right) = 0 \\ 6)\Sigma m_z\left(F_\imath\right) = 0 \end{array}}$$

Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил системы на каждую из 3-х координатных осей была равна нулю, и алгебраическая сумма моментов всех сил системы относительно каждой из 3-х координатных осей также должна равняться нулю.

Вопросы для самоконтроля

1) Метод двойного проецирования.
2) Аналитическое условие равновесия системы сходящихся сил в пространстве.
3) Момент силы относительно точки как вектор.
4) Выражение момента силы с помощью векторного произведения.
5) Момент силы относительно оси.
6) Связь между моментами относительно точки и оси.
7) Аналитическое выражение моментов силы относительно координатных осей.
8) Приведение пространственной системы сил к данному центру.
9) Главный вектор и главный момент пространственной системы сил
10) Теорема о моменте равнодействующей (Вариньона).
11) Условие равновесия произвольной пространственной системы сил.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер . – М. : Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
2. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика [Текст]: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 12-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 672 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1035-4 .
3. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.
4. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике[Текст]: Учебное пособие /И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
5. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

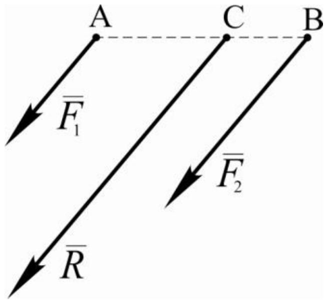
Дополнительная

1. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. –Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
2. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
3. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.

Лекция 6

СИСТЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

6.1. Сложение двух одинаково направленных параллельных сил.

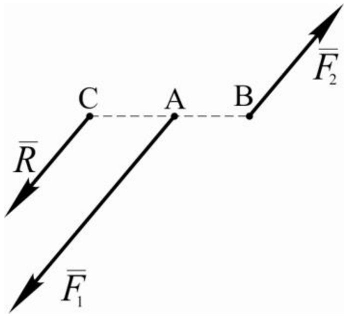


Пусть $F_1 \parallel F_2$. R=$F_1 + F_2$ - равнодействующая сила.
$R \parallel F_1 \parallel F_2$, причем $\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}$.

Т. о. *равнодействующая 2-х одинаково направленных параллельных сил по модулю равна сумме модулей этих сил, параллельна им и направлена в туже сторону, а точка приложения равнодействующей делит отрезок, соединяющий точки приложения сил, на части обратно пропорционально этим силам.*

6.2. Сложение двух противоположно направленных параллельных сил.

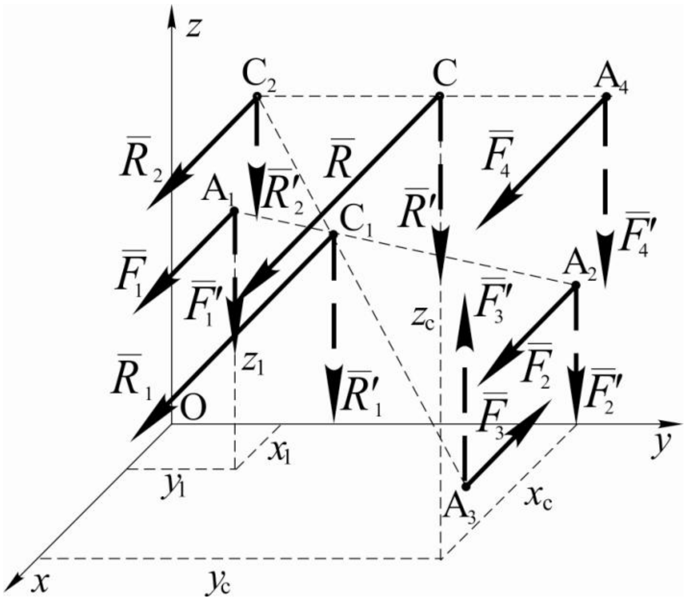
$F_1 \parallel F_2$. R=$F_1 - F_2$, $R \parallel F_1 \parallel F_2$, причем $\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}$.



Т. о. *равнодействующая 2-х параллельных и противоположно направленных сил по модулю равна разности модулей этих сил, параллельна им и направлена в сторону большей силы, а линия действия равнодействующей проходит через точку, отстоящую от точки приложения этих сил на расстояниях обратно пропорционально этим силам.*

6.3.Сложение системы параллельных сил.

Возьмем пространственную систему параллельных сил F_1, F_2, F_3, F_4.



R_1=$F_1 + F_2$. $\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_2C_1}{A_1C_1}$. R_2=$R_1 - F_3 = F_1 + F_2 - F_3$; $\frac{R_1}{F_3} = \frac{A_3C_2}{C_1C_2}$.

R=$R_2 + F_4 = F_1 + F_2 - F_3 + F_4 = \Sigma F_i$. $\frac{R_2}{F_4} = \frac{A_4C}{C_2C}$.

Следовательно, равнодействующая системы параллельных сил:

$\boxed{R = \Sigma F_i}$, т. е. такую систему сил можно сложить методом последовательного сложения. Точка С – центр системы параллельных сил.

Т. о. *равнодействующая система параллельных сил по модулю равна алгебраической сумме модулей слагаемых сил, параллельна им и приложена в точке, которая называется* ***центром системы параллельных сил.***

Центр системы параллельных сил получается в результате последовательного сложения сил системы и не меняет своего положения при повороте всех сил системы в одном направлении на один и тот же угол.

6.4. Координаты центра системы параллельных сил (см. рис к сложению системы параллельных сил)

На рисунке С- центр системы параллельных сил. x_c, y_c и z_c – координаты т. С, x_i, y_i и z_i - координаты точки A_i приложения сил F_i.

По теореме Вариньона (теорема о моменте равнодействующей) возьмем моменты относительно оси Оу при одном и том же угле поворота.

m_y R□ $= \Sigma m_y$ F_i и т. к. R□=$R_i \cdot F_i$□ $= F_1$ и т. д.

Запишем, что R$\cdot x_c = F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 - F_3 \cdot x_3 + F_4 \cdot x_4 = \Sigma F_i \cdot x_i$.

Откуда $x_c = \frac{\Sigma F_i \cdot x_i}{R} = \frac{\Sigma F_i \cdot x_i}{\Sigma F_i}$.

По аналогии получаются остальные координаты центра параллельных сил.

$$\boxed{\begin{aligned} x_c &= \frac{\Sigma F_i \cdot x_i}{\Sigma F_i} \\ y_c &= \frac{\Sigma F_i \cdot y_i}{\Sigma F_i} \\ z_c &= \frac{\Sigma F_i \cdot z_i}{\Sigma F_i} \end{aligned}}$$ – *координаты центра системы параллельных сил.*

В этих формулах F_i, x_i, y_i, z_i надо подставлять с соответствующими знаками.

Т. о. *координаты центра системы параллельных сил определяются как частное от деления алгебраической суммы произведений модуля сил на соответствующие координаты их точек приложения на алгебраическую сумму самих сил (или на их равнодействующую).*

Вопросы для самоконтроля

1) Сложение двух сил, направленных в одну сторону.
2) Сложение двух сил, направленных в противоположные стороны.
3) Сложение системы параллельных сил.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер . – М. : Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
2. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика [Текст]: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 12-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 672 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1035-4 .
3. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.
4. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике[Текст]: Учебное пособие /И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
5. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

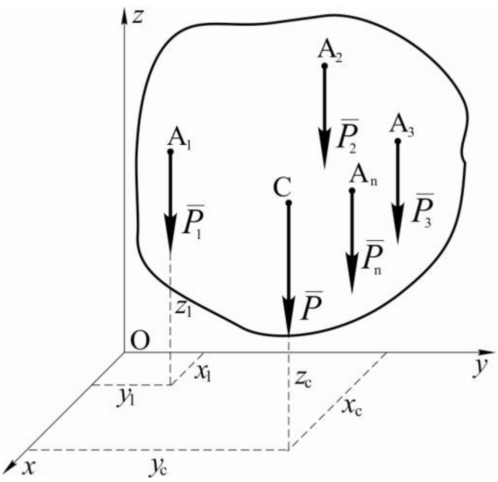
Дополнительная

1. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. –Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
2. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
3. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.

Лекция 7

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

7.1. Понятие о центре тяжести твердого тела.



Сила тяжести $\boxed{P = \Sigma P_i}$. т. С – центр тяжести твердого тела.

Центром тяжести твердого тела называется такая геометрическая точка, через которую проходит равнодействующая сил тяжести всех материальных частиц, составляющих это тело при любом его повороте. Центр тяжести находится там, где нет материальных частиц.

7.2. Общие формулы для определения координат центра тяжести твердого тела.

Т. к. центр тяжести (Ц. Т.) является центром системы параллельных сил, то координаты Ц. Т. твердого тела определяются по следующим формулам:

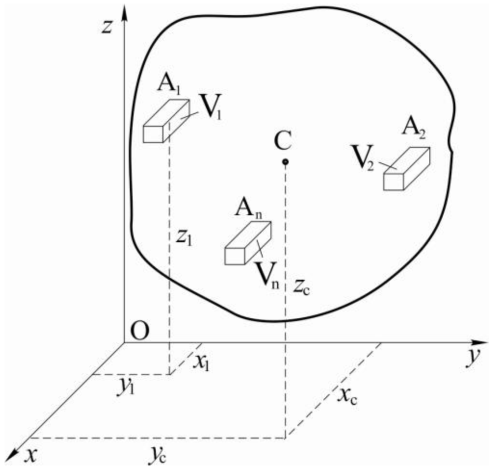
$$x_c = \frac{\Sigma P_i \cdot x_i}{\Sigma P_i}$$

$$y_c = \frac{\Sigma P_i \cdot y_i}{\Sigma P_i}$$

$$z_c = \frac{\Sigma P_i \cdot z_i}{\Sigma P_i}$$

7.3. Координаты центров тяжести однородных тел.

7.3.1.Центр тяжести объема



Объем тела V= ΣV_i, где V_i – объем i-ой части тела.

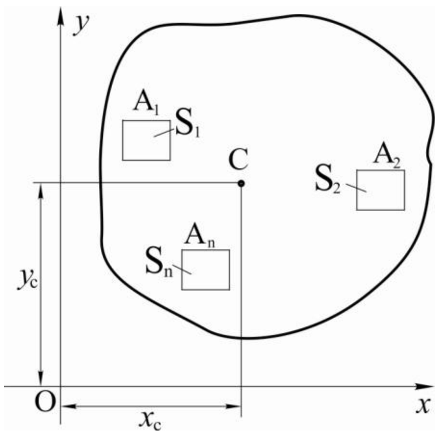
Вес i-ой части тела P_i=γ·V_i. Вес всего тела P=γ·V.

Ранее было получено, что $x_c = \frac{\Sigma P_i \cdot x_i}{\Sigma P_i}$. Тогда, подставляя значения P_i в эту формулу, будем иметь:

$$x_c = \frac{\Sigma \gamma \cdot V_i \cdot x_i}{\Sigma \gamma \cdot V_i} = \frac{\gamma \cdot \Sigma V_i \cdot x_i}{\gamma \cdot \Sigma V_i}, \text{ т. е.}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_c &= \frac{\Sigma V_i \cdot x_i}{\Sigma V_i} \\ y_c &= \frac{\Sigma V_i \cdot y_i}{\Sigma V_i} \\ z_c &= \frac{\Sigma V_i \cdot z_i}{\Sigma V_i} \end{aligned}}$$

7.3.2 Центр тяжести тонкой пластины.



Площадь всей пластины $S = \Sigma S_i$, где S_i- площадь ее частей.

Вес частей пластины $P_i = \gamma \cdot S_i$, где γ- плотность материала пластины.

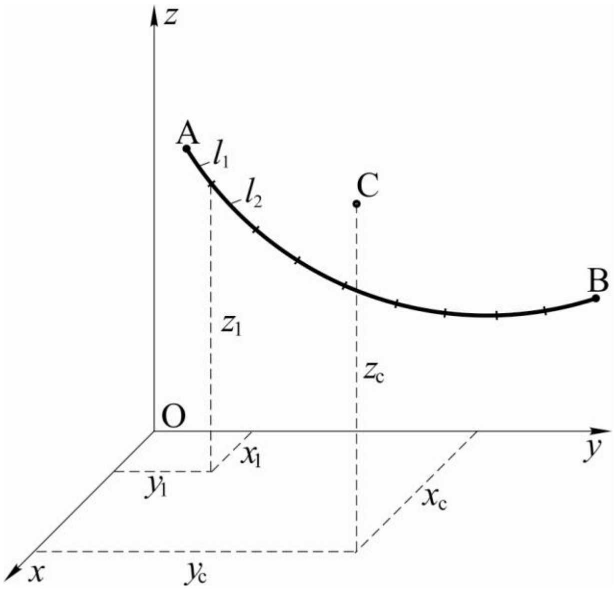
Тогда

$$x_c = \frac{\Sigma P_i \cdot x_i}{\Sigma P_i} = \frac{\Sigma\, \gamma \cdot S_i \cdot x_i}{\Sigma\, \gamma \cdot S_i} = \frac{\gamma \cdot \Sigma\, S_i \cdot x_i}{\gamma \cdot \Sigma\, S_i}.$$

Окончательно имеем:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_c = \frac{\Sigma S_i \cdot x_i}{\Sigma S_i} \\ y_c = \frac{\Sigma S_i \cdot y_i}{\Sigma S_i} \end{array}}.$$

7.3.3. Центр тяжести линии.



Длина линии $L = \Sigma\, l_i$, где l_i – длины ее частей.
Вес i-ой части $P_i = \gamma \cdot l_i$.
Тогда

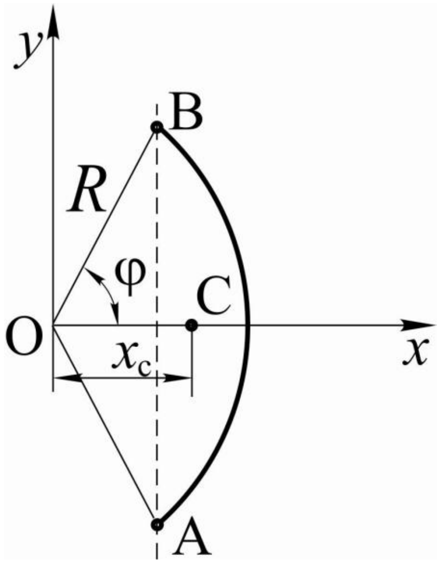
$$x_c = \frac{\Sigma P_i \cdot x_i}{\Sigma P_i} = \frac{\Sigma\, \gamma \cdot l_i \cdot x_i}{\Sigma\, \gamma \cdot l_i} = \frac{\gamma \cdot \Sigma\, l_i \cdot x_i}{\gamma \cdot \Sigma\, l_i}.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_c = \dfrac{\Sigma l_i \cdot x_i}{\Sigma l_i} \\ y_c = \dfrac{\Sigma l_i \cdot y_i}{\Sigma l_i} \\ z_c = \dfrac{\Sigma l_i \cdot z_i}{\Sigma l_i} \end{array}}$$

При использовании этих формул, необходимо предварительно разбить однородное тело на отдельные простейшие части и определить положение центров тяжести этих отдельных частей.

7.4. Центры тяжести некоторых простейших однородных тел.

7.4.1. Центр тяжести дуги окружности.



$$\boxed{OC = x_c = R \cdot \frac{\sin\varphi}{\varphi}},$$

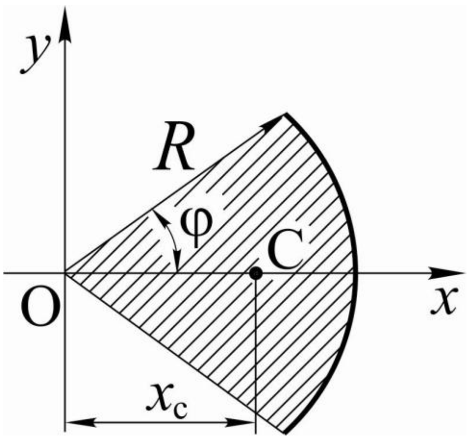
где R- радиус окружности; φ- половина центрального угла, выраженного в рад.

У полуокружности $\varphi = \frac{\pi}{2}$, следовательно для полуокружности

$$OC = x_c = R \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi} \approx 0{,}64R$$

$$\boxed{OC = x_c = \frac{2R}{\pi} \approx 0{,}64R}$$

7.4.2. Центр тяжести площади кругового сектора.



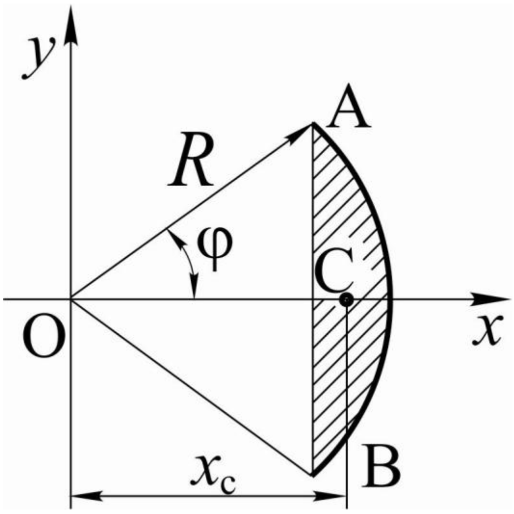
$$\boxed{OC = x_c = \frac{2}{3} R \cdot \frac{\sin\varphi}{\varphi}}$$

У полукруга $\varphi = \frac{\pi}{2}$, следовательно для полукруга

$$OC = x_c = \frac{2}{3}R \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4R}{3\pi}$$

$$\boxed{OC = x_c = \frac{4R}{3\pi} \approx 0{,}42R}$$

7.4.3. Центр тяжести кругового сегмента.



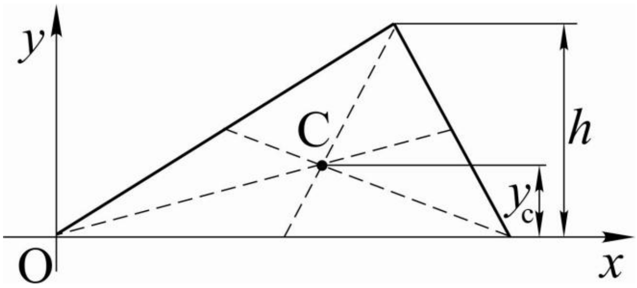
$$\boxed{OC = x_c = \frac{a^3}{12\,S}},$$

где a=AB –хорда, S –площадь сегмента.

Или

$$x_c = \frac{2}{3}R \cdot \frac{sin^3\varphi}{\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\varphi}$$

7.4.4. Центр тяжести площади треугольника.



$$\boxed{x_c = \frac{1}{3} \cdot h}$$

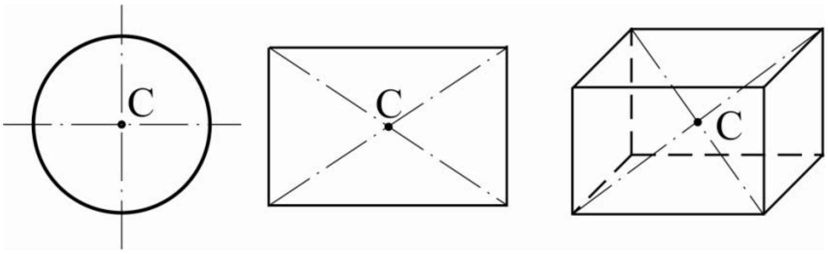
Центр тяжести площади треугольника лежит в точке пересечения его медиан.

7.5. Способы определения координат центра тяжести тел

Существуют следующие способы определения координат центра тяжести тел:

1) Способ симметрии.

Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно в плоскости симметрии, на оси симметрии или в центре симметрии.



2) Способ разбиения.

Этот способ заключается в том, что тело разбивается на конечное число таких частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно. Тогда координаты центра тяжести всего тела можно непосредственно вычислить по вышеприведенным формулам.

3) Способ отрицательных площадей или объемов (способ дополнения).

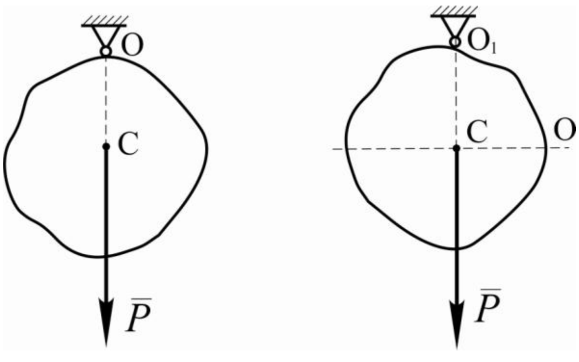
Этот способ является частным случаем способа разбиения. Он применяется к телам, имеющим вырезы (отверстия), если центры тяжести тела без выреза и вырезанной части известны. При определении центра тяжести тела с отверстиями считают объемы или площади, соответствующие вырезанным частям, при подстановке в формулы, отрицательными.

4) Экспериментальный способ.

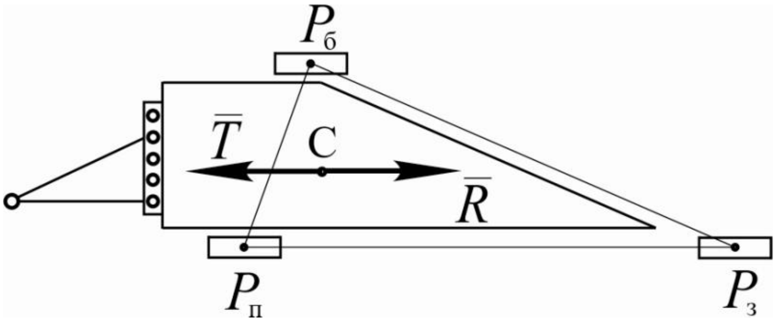
Используется для определения центра тяжести тел, имеющих сложную конфигурацию.

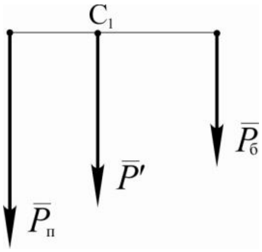
В основном используются:

а) метод подвешивания



б) метод взвешивания





Путем взвешивания определяют P_n – силу давления полевого колеса, $P_б$ – силу давления бороздового колеса.

По P_n и $P_б$ определяют C_1 , а затем C (используя $P_з$).

5) Способ интегрирования . (Когда ни один из вышеназванных способов не подходит).

Вопросы для самоконтроля

1) Понятие о центре тяжести.
2) Общие формулы для координат центра тяжести.
3) Определение центра тяжести однородных тяжелых линий, плоских фигур и тел.
4) Метод отрицательных площадей и объемов.
5) Определение центра тяжести треугольника, дуги окружности, сектора круга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер . – М. : Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
2. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика [Текст]: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 12-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 672 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1035-4 .

3. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.
4. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике[Текст]: Учебное пособие /И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
5. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная

1. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. –Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
2. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
3. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.

Раздел 2. КИНЕМАТИКА

Лекция 1

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

1.1. Введение в кинематику

Кинематикой называется раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных точек или твердых тел без учета их массы и действующих на них сил.

Слово «кинематика» происходит от греческого слова «кинема», что значит движение.

В общем смысле слова движение, понимаемое как форма бытия материи обнимает собою все происходящие во Вселенной изменения и процессы, начиная от простого перемещения и кончая мышлением.

В теоретической механике изучается только простейшая форма движения материи – механическое движение.

Под механическим движением в кинематике понимают изменение с течением времени положения в пространстве данного тела относительно других тел.

Для определения положения движущегося тела (или точки) с тем телом, по отношению к которому изучается движение, жестко связывают какую-нибудь систему координат, которая вместе с телом образует систему отсчета.

Основная задача кинематики состоит в описании с помощью математических уравнений движение точки или твердого тела по отношению к выбранной системе отсчета с тем, чтобы, зная закон движения твердого тела или точки, определить все кинематические величины, характеризующие не только движение тела в целом, но и движение каждой из его точек в отдельности (траектории, скорости, ускорения и т. п.).

Описать (задать) движение точки или тела в данной системе отсчета – значит указать его положение относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени.

Следует различать два понятия: «момент времени *t*» и «промежуток времени *t*».

Под «моментом времени *t*» понимается число секунд, отделяющих данный момент (данное мгновение) от начального момента (начала отсчета времени).

Промежутком времени *t* называется число секунд, отделяющих два последовательных момента времени друг от друга.

Промежуток времени t между двумя последовательными моментами t_1 и t_2, очевидно, равен разности t_2 и t_1, т. е. $t = t_2 - t_1$

Изучение кинематики начнем с изучения простейшего объекта – точки, затем перейдем к изучению кинематики твердого тела, а закончим – сложным движением.

1.2. Способы задания движения точки

Как уже отмечалось, чтобы задать движение точки, надо знать ее положение по отношению к выбранной системе отсчета в любой момент времени. Для этого можно применять один из следующих трех способов:

1) векторный,
2) координатный,
3) естественный.

1.2.1. Векторный способ задания движения точки

Пусть точка движется по какой-то траектории *AB* (рисунок 1).

Траектория – след, оставляемый движущейся точкой в пространстве. Траектория бывает прямолинейной и криволинейной.

Выбираем произвольно полюс *O*, который будет являться началом отсчета. Тогда радиус-вектор движущейся точки будет являться однозначной и непрерывной функцией времени *t*.

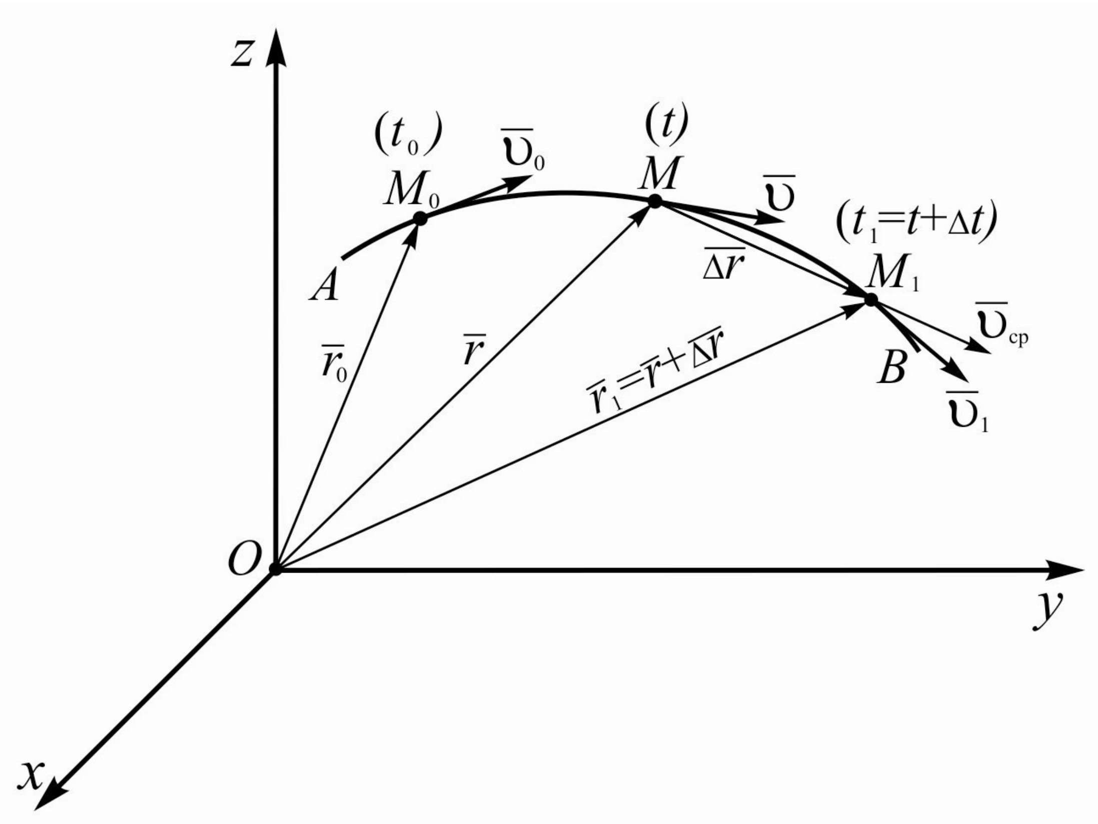


Рисунок 1

Для того чтобы задать движение точки векторным способом, необходимо знать уравнение (закон) движения точки.

$\boxed{r = r(t)}$ - эта зависимость называется уравнением (законом) движения точки в векторной форме.

Траектория точки является геометрическим местом концов радиус-вектора r движущейся точки.

Линия, образованная концами переменного вектора, начало которого находится в определенной точке пространства, называется годографом этого вектора. Следовательно, траектория точки *M* является годографом ее радиус-вектора r.

Рассмотрим, как определяется скорость и ускорение точки при векторном способе задания ее движения.

Из векторного $\Delta\, OMM_1$

$r_1 = r + \Delta r,$

где Δr=$r_1 - r$ - изменение (приращение) радиус-вектора движущейся точки за время Δt. Тогда

$$\upsilon_{ср} = \frac{\Delta r}{\Delta t}, \quad (1)$$

где $\upsilon_{ср}$ – средняя векторная скорость.

Средняя векторная скорость $\upsilon_{ср}$ представляет собой отношение приращения радиус-вектора точки к промежутку времени Δt. Направляется $\upsilon_{ср}$ по секущей MM_1 (в сторону Δr).

Перейдем к пределу $\Delta t \to 0$. Тогда получим вектор истинной скорости υ в момент времени t. Этот вектор приложен в точке M, направлен по касательной к траектории точки в положении M (направление секущей MM_1, при $\Delta t \to 0$, в пределе является направлением касательной) и, очевидно, равен $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$, т. е. $\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \upsilon_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$.

$$\boxed{\upsilon = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}} \quad (2)$$

Вектор скорости точки равен первой производной по времени радиус-вектора точки и направлен по касательной к траектории точки в сторону движения.

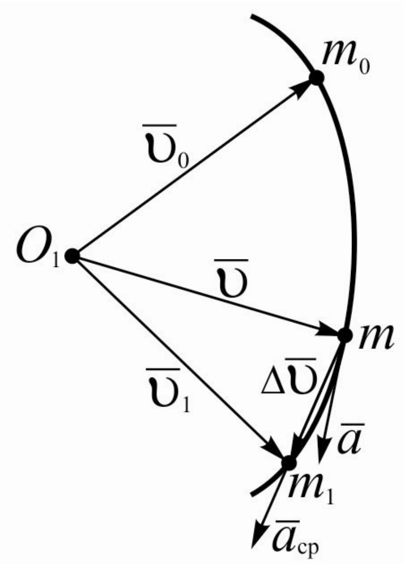


Рисунок 2

Перенесем векторы скоростей (см. рисунок 2), не изменяя их величин и направлений, в точку O_1. Тогда, если это сделать для всех положений точки на траектории и соединить концы векторов, то получим годограф скорости.

Годографом скорости называется геометрическое место концов векторов скорости, проведенных из одного полюса, для всех положений точки на траектории.

Рассмотрим $\Delta O_1 m m_1$. Из этого треугольника $\upsilon_1 = \upsilon + \Delta\upsilon$, где $\Delta\upsilon = \upsilon_1 - \upsilon$ - изменение (приращение) вектора скорости точки за время Δt.

Отношение приращения вектора скорости $\Delta\upsilon$ к промежутку времени Δt называют средним вектором ускорения за промежуток времени Δt, т. е.

$$a_{ср} = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} \quad (3)$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, будем иметь $a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$, т. е.

$$\boxed{a = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}} \quad (4)$$

Т. к. вектор скорости есть первая производная радиус-вектора точки по времени, то

$$\boxed{a = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}} \quad (5)$$

Вектор ускорения точки равен первой производной вектора скорости точки по времени или второй производной радиус-вектора точки по времени и направлен параллельно касательной к годографу скорости в сторону вогнутости траектории. Т. к. при определении ускорения учтено изменение скорости по величине и направлению, то его (ускорение) часто называют полным ускорением точки.

Ускорение измеряется в м/с^2, см/с^2 и т. п.

1.2.2. Координатный способ задания движения точки

Свяжем с телом прямоугольную декартову систему координат. Выберем единицу измерения расстояния и времени и начало отсчета. Тогда координаты движущейся точки будут изменяться с течением времени (см. рисунок 3), т. е. они будут являться непрерывными функциями времени, т.е.

$$x = f_1(t)$$
$$y = f_2(t) \qquad (6)$$
$$z = f_3(t)$$

Уравнение (6) называется уравнением движения точки в прямоугольных декартовых координатах. Эти уравнения являются параметрическими уравнениями траектории точки. По ним легко определить уравнение траектории точки в декартовых координатах. Для этого из уравнений (6) нужно исключить время *t*. Например, методом подстановки или любым другим.

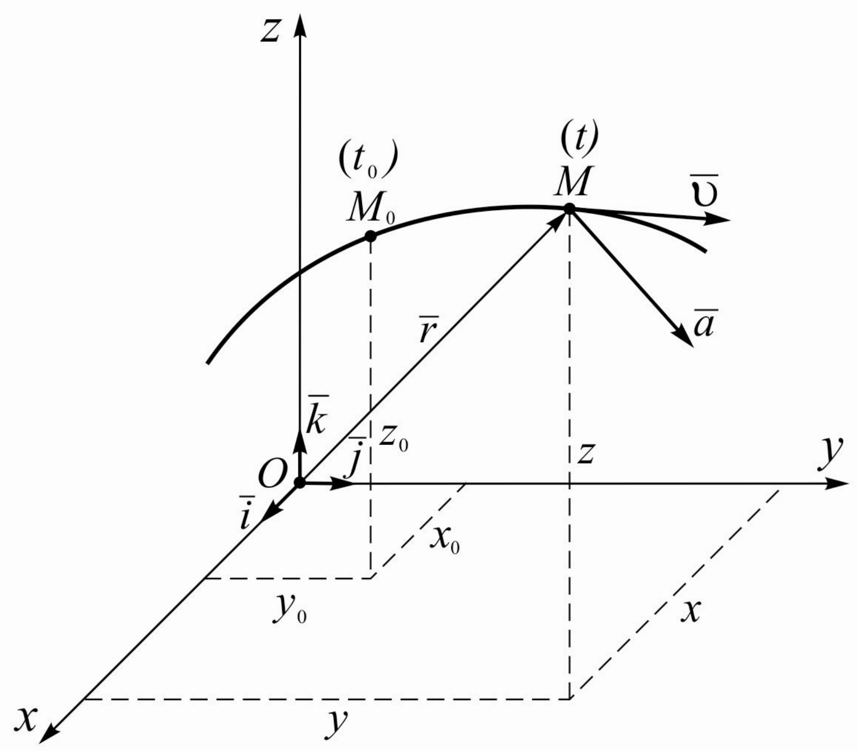


Рисунок 3

Из векторной алгебры известна формула разложения вектора по координатным осям

$$\boxed{r = x \cdot \imath + y \cdot \jmath + z \cdot k}, \qquad (7)$$

где x, y, z – проекции r на оси; i, j и k – единичные орты координатных осей.

Эта формула обеспечивает переход от координатного способа задания движения точки к векторному, и наоборот.

Возьмем векторную производную от выражения (7)

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \upsilon = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \imath + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \jmath + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \cdot k \qquad (8)$$

Из уравнений (7) и (8) видно, что

$$\boxed{\begin{matrix} \upsilon_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \upsilon_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \upsilon_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{matrix}} \qquad (9)$$

Проекции скорости точки на координатные оси равны первой производной от соответствующих координат точки по времени.

Зная проекции скорости точки на координатные оси, можно определить модуль скорости и ее направление соответственно по выражениям (10) и (11).

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}} \qquad (10)$$

$$\cos\ \upsilon; \imath\ = \frac{\upsilon_x}{\upsilon}$$
$$\cos\ \upsilon; \jmath\ = \frac{\upsilon_y}{\upsilon} \qquad (11)$$
$$\cos\ \upsilon; k\ = \frac{\upsilon_z}{\upsilon}$$

Как было доказано ранее, $a = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$.

Или с учетом выражений (8) и (9) $a = \frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t} \cdot \imath + \frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t} \cdot \jmath + \frac{\mathrm{d}\upsilon_z}{\mathrm{d}t} \cdot k$. (12)

Сравним выражения (7) и (12). Очевидно, что $\frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t}$ и $\frac{\mathrm{d}\upsilon_z}{\mathrm{d}t}$ - проекции ускорения точки, т. е.

$$a_x = \frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$
$$a_y = \frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \qquad (13)$$
$$a_z = \frac{\mathrm{d}\upsilon_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$$

Проекции полного ускорения точки на координатные оси (выражение (13)) равны первой производной от соответствующих проекций скорости точки по времени или второй производной от соответствующих координат по времени.

Модуль и направление полного ускорения точки определяются из следующих выражений

$$\boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \qquad (14)$$

$$\cos\ a; \imath\ = \frac{a_x}{a}$$
$$\cos\ a; \jmath\ = \frac{a_y}{a} \qquad (15)$$
$$\cos\ a; k\ = \frac{a_z}{a}$$

1.2.3. Естественный способ задания движения точки

Пусть точка движется по известной траектории *AD* (см. рисунок 4).

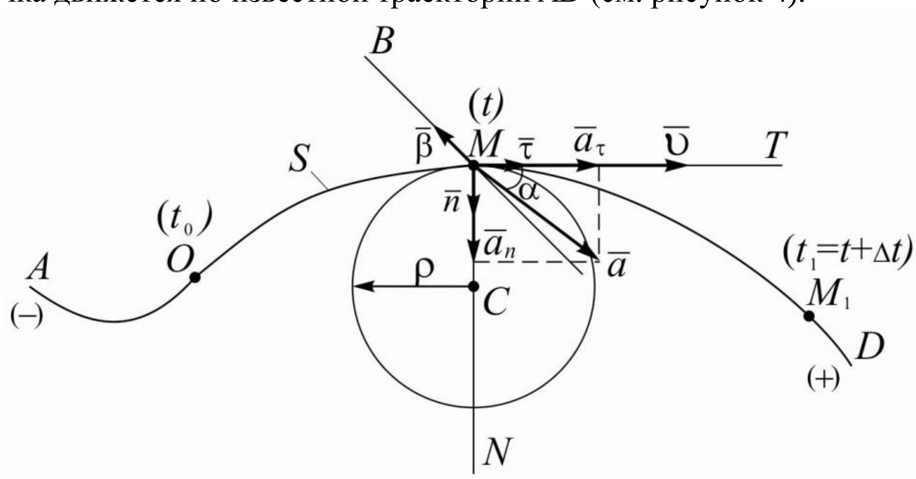


Рисунок 4

AD – траектория точки;

т.O – начало отсчета;

$\cup\, OM = S$ – дуговая или траекториальная координата точки;

N – главная нормаль;

B – бинормаль;

T – касательная.

При движении точки M, расстояние S от этой точки до неподвижной точки O непроизвольно изменяется с течением времени, т. е. дуговая координата S является функцией времени:

$$\boxed{S = f(t)} \qquad (16)$$

Эта зависимость называется уравнением движения точки по траектории (в естественной форме).

Т. о. для того, чтобы задать движение точки естественным способом, необходимо знать: 1) траекторию точки;

2) начало и направление отсчета дуговой координаты;

3) уравнение движения $S = f(t)$.

Рассмотрим, каким образом определяется скорость и ускорение точки при естественном способе задания ее движения.

Пусть в момент времени t точка занимает положение M, а в момент $t_1 = t + \Delta t$ - положение M_1. Тогда дуговые координаты этих точек будут иметь следующие значения: S=OM; $S_1 = \cup\, OM_1 = \cup\, OM + MM_1 = S + \Delta S$,

где $\Delta S = \cup\, MM_1$ - приращение дуговой координаты за время Δt.

Отношение приращения расстояния точки к соответствующему промежутку времени называют средней скоростью точки:

$$\boxed{\upsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}} \qquad (17)$$

Переходя от выражения (17) к пределу при $\Delta t \to 0$, получим алгебраическую величину скорости точки в данное мгновенье:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$

$$\boxed{\upsilon = \frac{dS}{dt}} \qquad (18)$$

$$\upsilon = \upsilon_\tau \cdot \tau\ .$$

Т. о., если движение точки задано в естественной форме, то для определения величины скорости нужно взять первую производную по времени от расстояния, выражаемого законом движения точки. Если знак производной «+», то, следовательно, расстояние возрастает, и т. M движется по траектории в том направлении, которое мы приняли за положительное при отсчете S.

Изобразим теперь на рисунке естественную систему координат (рисунок 4).

Естественной системой координат называется такая подвижная прямоугольная система координат, начало которой располагается в движущейся точке, а оси направляются по касательной к траектории точки, по главной нормали и по бинормали.

(τ, n, β) – осевые орты естественной системы координат.

Отложим по главной нормали отрезок CM =ρ – радиус кривизны траектории в данной точке. Используя точку C как центр, проведем радиусом ρ соприкасающуюся окружность.

$a = a_\tau + a_n + a_\beta$

Т. к. $a_\beta \perp$ осям N и T, то a_β=0, тогда

$$\boxed{a = a_\tau + a_n} \qquad (19)$$

Т. е. вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости $M\tau n$.

Причем, $a_\tau = a_\tau \cdot \tau$, а $a_n = a_n \cdot n$.

Следовательно $a = a_\tau \cdot \tau + a_n \cdot n$ (20)

Известно, что $\upsilon = \upsilon \cdot \tau$,

где $\upsilon = \frac{dS}{dt}$ – алгебраическая скорость.

При движении точки $\upsilon \neq \mathrm{const}$ и $\tau \neq \mathrm{const}$.

Тогда

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\ \upsilon \cdot \tau\ = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \tau + \frac{d\tau}{dt} \cdot \upsilon = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \tau + \upsilon \cdot \frac{d\tau}{dt} \cdot \frac{dS}{dS} = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \tau + \upsilon^2 \cdot \frac{d\tau}{dS}$$

$\boxed{\frac{d\tau}{dS} = \frac{1}{\rho} \cdot n}$ - формула Френе (вектор кривизны).

Подставляя формулу Френе в последнее выражение, получим

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \tau + \upsilon^2 \cdot \frac{1}{\rho} \cdot n \qquad (21)$$

Из сравнения выражений (20) и (21) видно, что

$\boxed{a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}}$ - касательное или тангенциальное ускорение точки, направлено по касательной к траектории данной точки.

$\boxed{a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}}$ – нормальное или центростремительное ускорение точки, направлено по главной нормали к центру кривизны траектории.

$\boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}}$ – полное ускорение точки

$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_n}{a_\tau}}$ – направление полного ускорения.

Касательное ускорение точки влияет на изменение скорости точки по ее величине (модулю).

Нормальное ускорение точки влияет на изменение скорости точки по направлению.

Полное ускорение влияет на оба параметра. В этом состоит физическая сущность ускорений.

Естественным способом задания движения точки необходимо пользоваться в том случае, когда известна траектория точки.

1.2.4. Связь между координатным и естественным способами задания движения точки.

Дано: $\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned}$ (координатный способ задания движения точки).

Определить S=$f(t)$ – закон движения точки по траектории.

Как было доказано ранее

$\upsilon = \frac{dS}{dt}$; $dS = \upsilon \cdot dt$; $\int_0^S dS = \int_0^t \upsilon \cdot dt$

$\boxed{S = \int_0^t \upsilon \cdot dt}$ – формула перехода от координатного способа задания движения точки к естественному.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие способы задания движения точки Вы знаете?
2. Чему равна скорость и ускорение точки при векторном способе задания движения?
3. В чем заключается координатный способ задания движения? Как можно определить уравнение траектории по уравнениям движения точки?
4. Чему равна скорость и ускорение точки при координатном способе задания движения?
5. В чем заключается естественный способ задания движения. Как определить скорость точки при естественном способе задания движения?
6. Как определяются проекции полного ускорения точки на естественные оси (касательное и нормальное ускорение)?
7. Чему равны касательное и нормальное ускорения точки в частных случаях движения (равномерное, неравномерное, прямолинейное, криволинейное)?
8. Какая существует связь между координатным и естественным способами задания движения точки?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер . – М. : Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
2. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика [Текст]: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 12-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 672 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1035-4 .
3. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.
4. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике[Текст]: Учебное пособие /И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
5. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная

1. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. –Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
2. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
3. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.

Лекция 2

КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Различают пять видов движения твердого тела:
1) поступательное;
2) вращательное;
3) плоское или плоскопараллельное;
4) сферическое;
5) общий случай движения твердого тела.

Первые три вида будут изучаться на лекциях и прочих занятиях, а остальные два – самостоятельно.

Приступая к изучению движения твердого тела, необходимо, прежде всего, установить, к какому из указанных видов движения оно относится.

Рассмотрим, в первую очередь, поступательное и вращательное движения твердого тела, как самые простейшие.

2.1. Поступательное движение твердого тела

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, соединяющая две точки тела, движется параллельно самой себе.

Поступательное движение твердого тела может быть как прямолинейным, так и криволинейным.

Например, движения поршня в цилиндре д.в.с., кран-балки вдоль цеха, автомобиля на прямом горизонтальном участке будут поступательными прямолинейными.

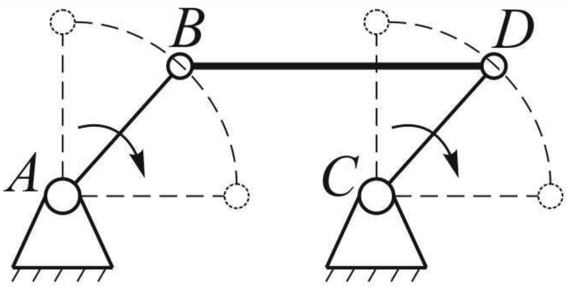


Рисунок 5

Примером криволинейного поступательного движения может служить движение спарника *BD*, соединяющего пальцы равных кривошипов *AB* и *CD* (рисунок 5). Все точки спарника описывают окружности радиусом, равным длине кривошипа.

Свойства поступательного движения определяются следующей теоремой:

«Все точки твердого тела, движущегося поступательно, описывают одинаковые (при наложении совпадают) траектории и в каждый момент времени имеют геометрически равные скорости и ускорения»

Для доказательства выберем две произвольные точки твердого тела A и B (рисунок 6). Проведем из точки A в точку B радиус-вектор r_{AB}.

Т. к. тело движется поступательно, то во время его движения отрезок AB остается параллелен самому себе, а следовательно r_{AB}=const. Тогда из ΔOAB

$$r_B = r_A + r_{AB} \qquad (22)$$

Равенство (22) будет справедливо во все время движения. Из (22) следует, что если траекторию точки A переместить по направлению $r_{AB} = const$ на расстояние AB, то она совпадет с траекторией точки B. Определим вектор скорости т. B, для чего продифференцируем по времени уравнение (22).

$$\upsilon_B = \frac{\mathrm{d}r_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r_A}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r_{AB}}{\mathrm{d}t}, \text{ но } \frac{\mathrm{d}r_A}{\mathrm{d}t} = \upsilon_A, \text{ а } \frac{\mathrm{d}r_{AB}}{\mathrm{d}t} = 0. \text{ Поэтому } \upsilon_A = \upsilon_B.$$

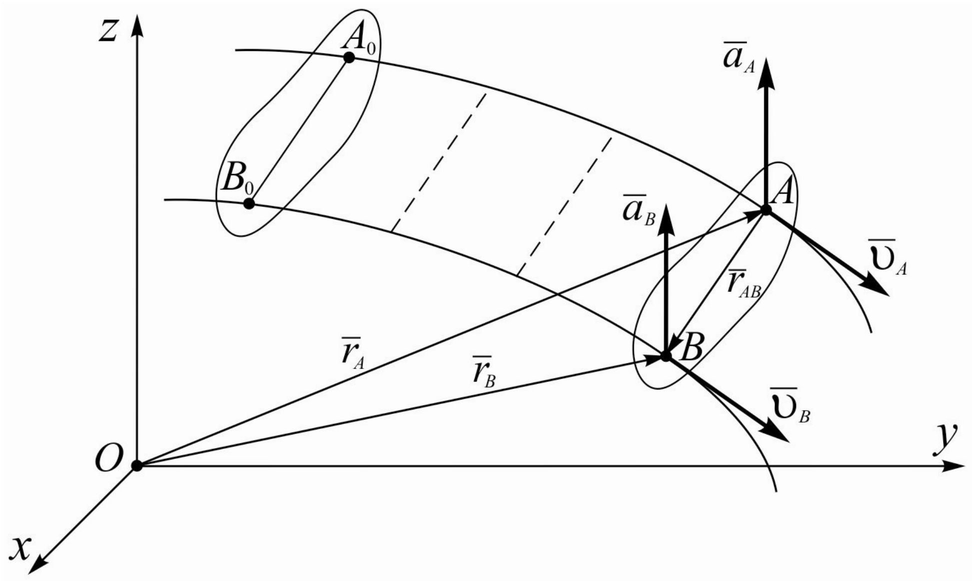


Рисунок 6

Как было доказано ранее,

$$a_B = \frac{\mathrm{d}\upsilon_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\upsilon_A}{\mathrm{d}t} = a_A$$

$$a_A = a_B$$

Т. е. ускорения т. A и т. B геометрически равны. Т. к. т. A и т. B произвольны, то полученные соотношения относятся ко всем точкам тела.

Установленные свойства постоянного движения позволяют свести изучение постоянного движения твердого тела к изучению движения отдельной точки этого тела, как правило, центра масс, т. е. к задаче кинематики точки.

2.2. Вращательное движение твердого тела

2.2.1. Уравнение (закон) вращательного движения. Угловая скорость и угловое ускорение тела.

<u>Вращательным движением</u> твердого тела называется такое его движение, при котором остаются неподвижными все его точки, лежащие на некоторой прямой, называемой осью вращения.

При этом все остальные точки тела движутся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и описывают окружности, центры которых лежат на этой оси.

Зададимся направлением оси z (рисунок 7). Проведем через эту ось две полуплоскости: I – неподвижная полуплоскость; II – подвижная полуплоскость связана с твердым телом и вращается вместе с ним.

φ – угол поворота, который выражается в рад.

<u>Радианом</u> называется центральный угол, длина дуги которого равна радиусу. Угол, равный 360°, содержит 2π рад. 1 рад=57° 17′ 44,8″. Угол поворота φ в рад, соответствующий N оборотам $\varphi=2\pi N$.

При повороте плоскости II на угол φ, точка A_0 переместится по $\cup A_0A = S$, а точка B_0 по дуге $\cup B_0B = S_1$, причем $\cup S \neq \cup S_1$. При этом центральные углы, на которые повернутся точки A_0 и B_0 данного твердого тела, будут равны, т.е. $\varphi_A = \varphi_B = \varphi$.

Следовательно, значение угла поворота φ вполне определяет положение тела при его вращении вокруг оси z, т. е. угол φ является однозначной и непрерывной функцией времени t, являющейся уравнением (законом) вращательного движения твердого тела.

$$\boxed{\varphi = f(t)} \qquad (23)$$

Если функция $\varphi = f(t)$ известна, то для каждого момента времени t будет вполне определено значение угла φ, т. е. будет известно положение твердого тела в данный момент.

Пусть в момент времени t тело от начала отсчета повернулось на угол φ, а в момент времени $t_1=t+\Delta t$ - на угол $\varphi+\Delta\varphi$. Следовательно, за время Δt тело повернется на угол Δφ. Тогда $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega_{ср}$ – средняя угловая скорость.

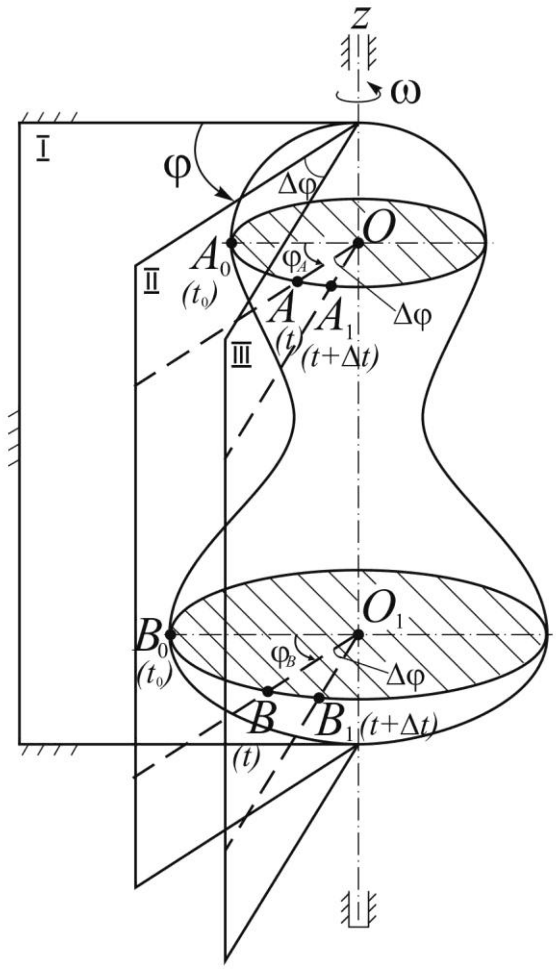


Рисунок 7

<u>Средней угловой скоростью</u> $\omega_{ср}$ называется отношение приращения угла поворота Δφ к соответствующему промежутку времени Δt, т. е.

$$\boxed{\omega_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}} \qquad (24)$$

Переходя от выражения (24) к его пределу, при $\Delta t\to 0$, получим алгебраическую величину угловой скорости.

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\omega_{ср} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt}} \qquad (25)$$

<u>Угловой скоростью</u> называется особая физическая величина, которая характеризует быстроту изменения угла поворота φ с течением времени, и численно равна первой производной от угла поворота по времени.

Единицей измерения угловой скорости является рад/с.

При неравномерном вращении тела происходит изменение угловой скорости. Пусть в момент времени t угловая скорость была равна ω, а в момент времени $t_1=t+\Delta t$ угловая скорость имела значение $\omega_1=\omega+\Delta\omega$, т. е.

$$t\to\omega$$
$$\underline{t+\Delta t\to\omega+\Delta\omega}$$
$$\Delta t\to\Delta\omega$$

Отношение $\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon_{ср}$ обозначим как среднее угловое ускорение.

Средним угловым ускорением $\varepsilon_{ср}$ называется отношение приращения угловой скорости Δω к соответствующему промежутку времени Δt, т. е.

$$\boxed{\varepsilon_{ср} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}} \qquad (26)$$

Переходя от выражения (26) к его пределу при $\Delta t \to 0$, получим алгебраическую величину углового ускорения вращающегося тела в любой момент времени t, т. е.
$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}} \qquad (27)$$

Угловым ускорением тела называется особая физическая величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости с течением времени, и численно равна первой производной от угловой скорости по времени или второй производной от угла поворота по времени.

Единицей измерения углового ускорения является рад/с^2.

Формулы (23), (25) и (27) характеризуют движение любой точки вращающегося твердого тела.

2.2.2. Частные случаи вращательного движения твердого тела.

Равномерное вращение твердого тела.

Вращение тела с постоянной угловой скоростью называется равномерным, т. е. $\varepsilon=0$, а $\omega = const$.

Положим, что в начальный момент времени $t_0=0$, угол поворота имеет значение φ_0, тогда $\frac{d\varphi}{dt} = \omega = const$; $d\varphi = \omega \cdot dt$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \cdot \int_0^t dt$$

$\varphi - \varphi_0 = \omega t$

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t} \qquad (28)$$

Выражение (28) является уравнением (законом) равномерного вращения твердого тела.

Если $\varphi_0=0$, то $\varphi=\omega t$, откуда угловая скорость равномерного вращения равна:

$$\boxed{\omega = \frac{\varphi}{t}} \qquad (29)$$

Если $\varphi_0 \neq 0$, то

$$\boxed{\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}}, \qquad (30)$$

т. е. угловая скорость равномерного вращения твердого тела равна отношению приращения угла поворота за некоторый промежуток времени к величине этого промежутка.

В современной технике очень часто пользуются понятием «частота вращения твердого тела».

Частотой вращения называется число оборотов, совершаемых вращающимся телом за единицу времени (обычно за минуту), и обозначается n.

Т. к. 1 об=360□ = 2π рад, а $\varphi = 2\pi n$, то зависимость между угловой скоростью ω [с$^{-1}$] и частотой вращения n [об/мин] имеет вид:

$\frac{\varphi}{t} = \omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$, т. е.

$$\boxed{\omega = \frac{\pi n}{30}} \qquad (31)$$

Равнопеременное (равноускоренное и равнозамедленное) вращение твердого тела.

Вращение тела, при котором ε=const, называется равнопеременным.

Если абсолютная величина угловой скорости ω увеличивается, то вращение называется равноускоренным, а если уменьшается – равнозамедленным.

Составим уравнение равнопеременного вращения.

Пусть при t_0=0 угловая скорость равна ω_0. Тогда из формулы

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \to d\omega = \varepsilon dt$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt ;$$

ω-ω_0= εt.

Т.о. угловая скорость равноускоренного вращения твердого тела равна

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t} \qquad (32)$$

Уравнение (32) можно записать в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon \cdot t \to \; d\varphi = \omega_0 + dt + \varepsilon t \cdot dt$$

Проинтегрируем последнее выражение в соответствующих пределах:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega_0 \cdot \int_0^t dt + \varepsilon \cdot \int_0^t t \cdot dt \to \quad \varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}} \qquad (33)$$

Выражение (33) является уравнением (законом) равноускоренного вращения тела, которое при φ_0=0 и ω_0=0 имеет вид:

$$\boxed{\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}} \qquad (34)$$

В случае равнозамедленного вращения, в формулах (32)…(34) перед ε должен стоять знак « - » .

2.2.3. Определение линейных скоростей и ускорений точек вращающегося твердого тела.

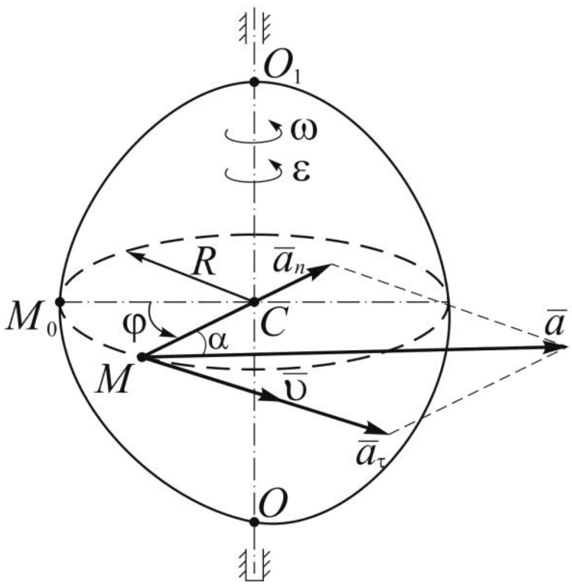


Рисунок 8

Пусть вращение тела задано уравнением $\varphi = f(t)$. Для простоты допустим, что φ_0=0. Составим уравнение движения точки *M* по ее траектории (окружности радиусом *R*) (рисунок 8).

$S = M_0M = R \cdot \varphi = R \cdot f(t)$

Точка *M* помимо угловой скорости имеет еще и линейную (при движении по окружности, она называется еще окружной). Эта скорость направлена по касательной к траектории и будет равна:

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = R \cdot \frac{d\varphi}{dt} = R \cdot \omega$$

$$\boxed{\upsilon = R \cdot \omega} \qquad (35)$$

Вектор линейной (окружной) скорости любой точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен по модулю произведению модуля угловой скорости тела на кратчайшее расстояние от точки до оси и направлен в сторону вращения перпендикулярно к плоскости, проходящей через точку и ось вращения (по касательной к траектории).

Ускорение точки *M* определим по касательному и нормальному ускорениям.

Продифференцируем выражение (35):

$$\frac{d\upsilon}{dt} = a_\tau = R \cdot \frac{d\omega}{dt} = R \cdot \varepsilon \text{, т. е.}$$

$$\boxed{a_\tau = R \cdot \varepsilon} \qquad (36)$$

Касательное (тангенциальное) ускорение точки по модулю равно произведению углового ускорения тела на радиус вращения точки и направлено по касательной к траектории.

Из кинематики точки известно, что $a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}$. Тогда для точки вращающегося тела будем иметь

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{R^2 \cdot \omega^2}{R} = R \cdot \omega^2, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{a_n = R \cdot \omega^2} \qquad (37)$$

Нормальное (центростремительное) ускорение любой точки по модулю равно произведению радиуса вращения точки на квадрат угловой скорости.

С учетом выражений (36) и (37) полное ускорение точки будет определяться:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{(R\omega^2)^2 + (R\varepsilon)^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\text{, т. е.}$$

$$\boxed{a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \qquad (38)$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{R\varepsilon}{R\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}}, \qquad (39)$$

где α – угол между a и СМ.

Этот угол для всех точек тела одинаков.

2.2.4. Угловая скорость и угловое ускорение вращающегося твердого тела как векторы.

До сих пор мы рассматривали ω и ε как скалярные величины. Введем понятия векторов угловой скорости ω и ε.

Условимся изображать угловую скорость вращающегося твердого тела вектором, направляя его от любой точки оси вращения по этой оси так, чтобы, смотря навстречу этому вектору, видеть вращение тела, происходящим в сторону, обратную вращению часовой стрелки.

Модуль вектора угловой скорости ω определяется по формуле $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

Это правило относится к правой системе координат, которой мы и будем в дальнейшем пользоваться.

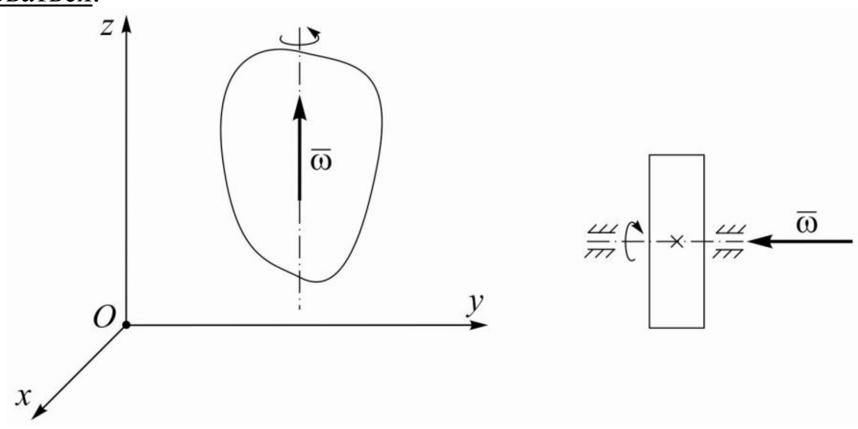


Рисунок 9. Правая система координат и правило правого винта

Для левой системы координат вектор угловой скорости ω направляется в ту сторону, откуда вращение тела мы будем видеть происходящим по часовой стрелке.

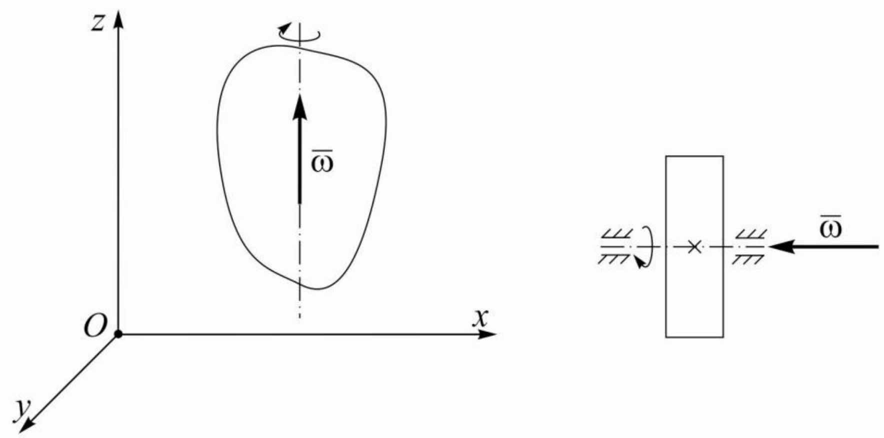


Рисунок 10. Левая система координат и правило левого винта

Векторы, направления которых зависят от принятой системы координат, называются псевдовекторами.

Вектор углового ускорения ε характеризует изменение вектора угловой скорости ω в зависимости от времени, т. е.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

Известно, что направление векторной производной совпадает с предельным направлением приращения дифференцируемого вектора. Т. к. вектор ω имеет постоянное направление, то направление его приращения Δω будет совпадать с направлением самого вектора ω. Если вращение ускоренное и противоположно ω, то – замедленное.

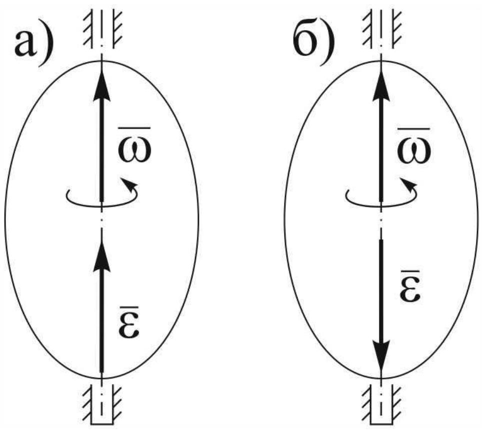


Рисунок 11

Если знаки $\frac{d\varphi}{dt}$ и $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ одинаковые, то вращение ускоренное (рисунок 11, а). Если знаки $\frac{d\varphi}{dt}$ и $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ различные, то вращение замедленное (рисунок 11, б).

Модуль вектора углового ускорения определяется по формуле:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Т. к. точки приложения векторов ω и ε выбираются произвольно, то эти векторы являются скользящими.

2.2.5. Выражения линейной скорости, касательного и нормального ускорений точек вращающегося твердого тела в виде векторных произведений.

Выведем векторное выражение линейной скорости какой-нибудь точки *M*, пользуясь понятием вектора ω (рисунок 12).

$O_1M = R$ – радиус вращения т. *M*.

т. *O* – полюс, выбранный произвольно на оси вращения.

ρ - радиус-вектор т. *M*.

α - угол между радиус-вектором ρ и вектором угловой скорости ω.

$\upsilon \perp O_1M$ (пл. ΔOMO_1), υ (⊥z).

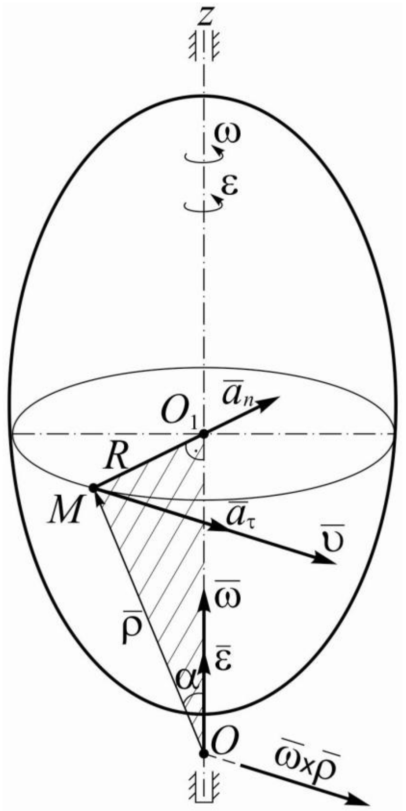


Рисунок 12

Модуль скорости т. M $\upsilon = \omega \cdot R$, $R = \rho \cdot \sin\alpha$ (из ΔOMO_1).

$$\upsilon = \omega \cdot \rho \cdot \sin\alpha \qquad (40)$$

Из векторной алгебры известно, что векторное произведение двух векторов

$$\omega \times \rho = \omega \cdot \rho \cdot \sin\alpha \qquad (41)$$

Кроме того, $\omega \times \rho \perp$ пл. ΔOMO_1

Сравнивая выражения (1) и (2), получим

$$\boxed{\upsilon = \omega \times \rho} \qquad (42)$$

Выражение (42) называется формулой Эйлера и выражает вектор линейной скорости точки вращающегося тела, который равен векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус-вектор, проведенный из любой точки, лежащей на оси вращения тела, в данную точку.

Для получения векторных формул касательного и нормального ускорений продифференцируем по времени выражение (42):

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\ \omega \times \rho\ = \frac{d\omega}{dt} \times \rho + \omega \times \frac{d\rho}{dt} =$$

$$= \varepsilon \times \rho + \omega \times \upsilon = \varepsilon \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho)$$

Т.е. $\quad a = \varepsilon \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho) \qquad (43)$

Ранее было получено $\ a = a_\tau + a_n. \qquad (44)$

Из сравнения выражений (43) и (44) и рисунка 12 видно, что

$$\boxed{a_\tau = \varepsilon \times \rho} \qquad (45)$$

$$\boxed{a_n = \omega \times \upsilon} \qquad (46)$$

Докажем по-другому, что первое слагаемое $\varepsilon \times \rho$ выражения (43) есть касательное ускорение, а второе $\omega \times \upsilon$ - центростремительное ускорение.

Известно, что модуль касательного ускорения

$$a_\tau = \varepsilon R = \varepsilon \rho \sin\alpha \qquad (47)$$

где α – угол между ε и ρ

Модуль векторного произведения $\varepsilon \times \rho$ (из векторной алгебры)

$$\varepsilon \times \rho\ = \varepsilon\rho \sin\alpha \qquad (48)$$

Сопоставляя выражения (47) и (48), устанавливаем

$$\boxed{\begin{array}{c} a_\tau = \ \varepsilon \times \rho \\ a_\tau = \varepsilon \times \rho \end{array}}$$

Т. е. касательное (вращательное) ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равно векторному произведению вектора углового ускорения тела на радиус-вектор этой точки относительно любой точки оси ее вращения.

По аналогии для нормального ускорения получаем

$$a_n = \omega^2 R = \frac{\upsilon^2}{R^2} \cdot R = \frac{\upsilon}{R} \cdot \upsilon = \omega\upsilon \qquad (49)$$

$$\omega \times \upsilon\ = \omega\upsilon \sin\alpha = \omega\upsilon\ , \qquad (50)$$

т. к. $\sin\alpha = \sin(\omega; \upsilon) = \sin 90° = 1$ (при $\omega \perp \upsilon$).

Из сопоставления (49) и (50) и правила векторного произведения:

$$\boxed{\begin{array}{c} a_n = \omega \times \upsilon \\ a_n = \omega \times \upsilon \end{array}}$$

Т. е. нормальное ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равно векторному произведению вектора угловой скорости тела на линейную (вращательную) скорость этой точки.

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите определение и основное свойство поступательного движения твердого тела.
2. Какое движение твердого тела называется вращательным? Запишите закон вращения твердого тела. Как определяется угловая скорость и угловое ускорение?
3. Чему равны линейная (окружная) скорость (ее модуль) и ускорение точки вращающегося твердого тела?
4. Какое вращение твердого тела называется равномерным? Запишите закон равномерного вращения и формулу для нахождения угловой скорости. Какая существует зависимость между угловой скоростью и числом оборотов в минуту?
5. Какое вращение твердого тела называется равнопеременным? Запишите закон такого вращения и формулу для определения угловой скорости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер . – М. : Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
2. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика [Текст]: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 12-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 672 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1035-4 .
3. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.
4. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике[Текст]: Учебное пособие /И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
5. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная

1. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. –Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
2. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
3. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.

Лекция 3

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ (ПЛОСКОЕ) ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плоскопараллельным или плоским движением твердого тела называется такое его движение, при котором все точки этого тела движутся только в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

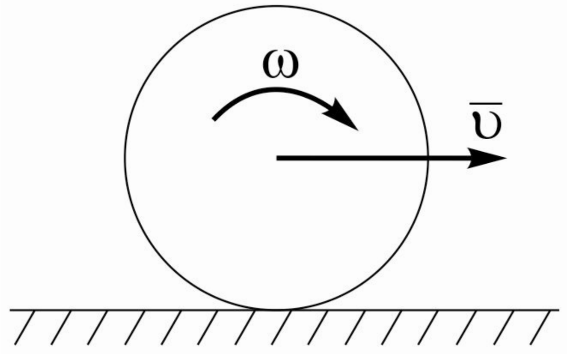


Рисунок 13

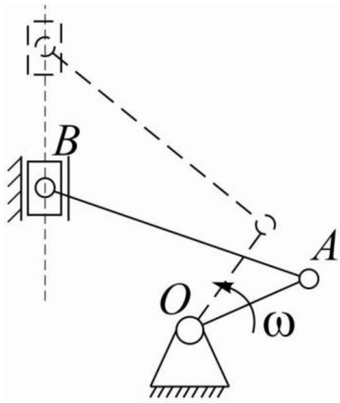


Рисунок 14

Каток (рисунок 13) и шатун AB (рисунок 14) совершают плоское движение.

Установим, к чему сводится изучение плоского движения.

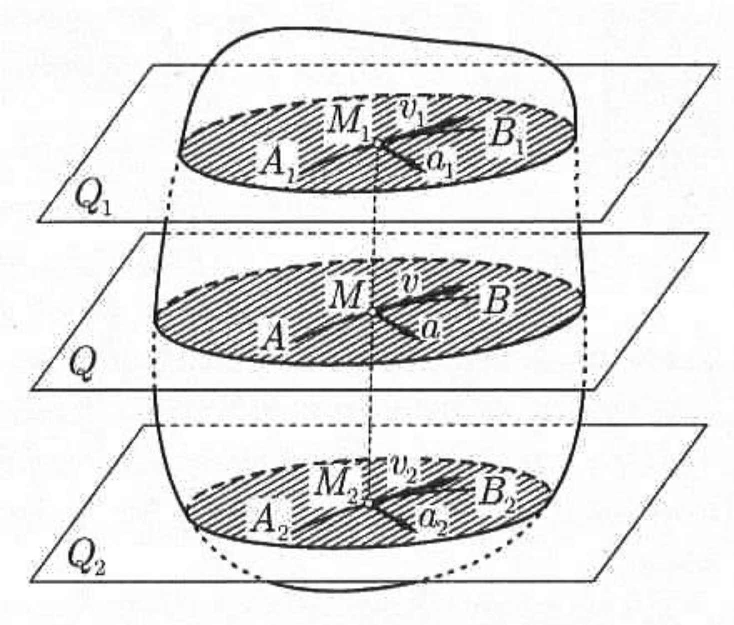


Рисунок 15

Рассмотрим движение точек тела, расположенных на одном перпендикуляре к неподвижной плоскости Q. Точка M_1 движется в плоскости Q_1, а т. M_2 – в плоскости Q_2; обе плоскости Q_1 и Q_2 параллельны плоскости Q. При движении тела, отрезок M_1M_2 остается перпендикулярен к плоскости Q, т. е. остается параллелен самому себе (своему начальному положению).

Это значит, что все точки этого перпендикуляра описывают одинаковые и параллельные между собой траектории, и в каждый момент времени имеют геометрически равные скорости и ускорения.

Т. е. траектории A_1B_1, AB, A_2B_2 точек тела M_1, M, M_2 тождественны и параллельны, а их скорости и ускорения равны: $\upsilon_1=\upsilon=\upsilon_2$, а $a_1=a=a_2$.

Следовательно, движение отдельной точки плоской фигуры в неподвижной плоскости Q определяет собой движение всех точек тела, расположенных на перпендикуляре к плоскости Q, восстановленной в этой точке. Это позволяет свести изучение плоского движения тела к изучению движения плоской фигуры в ее плоскости.

В свою очередь, т. к. положение плоской фигуры на плоскости целиком определяется положением двух ее точек или отрезком, соединяющим две точки этой фигуры, (см. рисунок 16), то, следовательно, движение плоской фигуры в ее плоскости можно изучать как движение прямолинейного отрезка в этой плоскости.

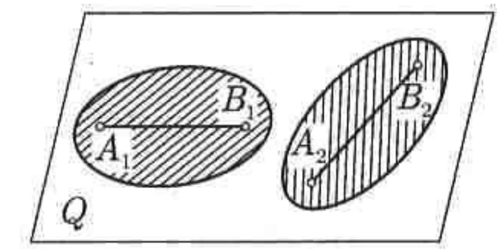


Рисунок 16

В дальнейшем условимся, что движение плоской фигуры происходит в плоскости рисунка и, следовательно, рисунок является натуральным изображением фигуры.

3.1. Уравнения (закон) плоского движения твердого тела

Возьмем плоскую фигуру S, движущуюся в плоскости чертежа (см. рисунок 17). Отнесем это движение к неподвижной системе координат xOy .

Выберем на плоской фигуре произвольно т. O_1 и свяжем с ней подвижную систему координат $x_1O_1y_1$.

x_{O1} и y_{O1} – координаты точки O_1 (начало подвижной системы координат), φ – угол между неподвижными и подвижными осями.

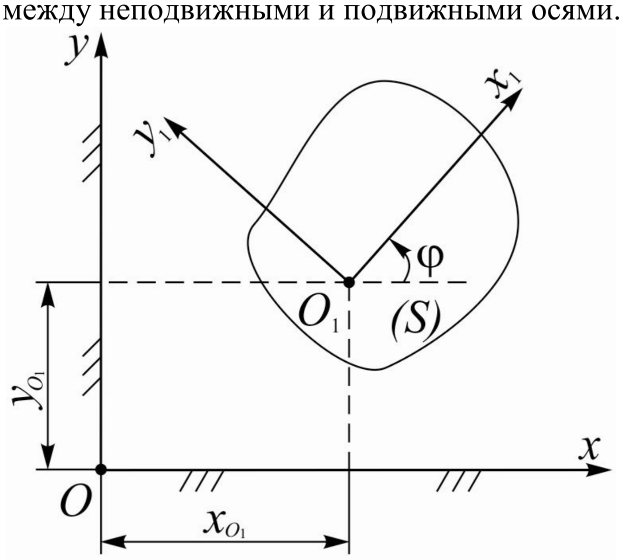


Рисунок 17

Очевидно, зная координаты точки O_1 и угол φ в любой момент времени, можно вполне определить положение плоской фигуры (S) по отношению к неподвижной системе координат xOy . С течением времени координаты т. O_1 (x_{O1}; y_{O1}) и угол φ будут изменяться. Следовательно, они являются однозначными и непрерывными функциями времени t;

$$\boxed{\begin{aligned} x_{O1} &= f_1\ t\ ; \\ y_{O1} &= f_2\ t\ ; \\ \varphi &= f_3\ t\ . \end{aligned}}$$

Эти выражения и являются уравнениями плоского движения плоской фигуры или твердого тела.

3.2. Теорема о разложении движения плоской фигуры на поступательное и вращательное.

Теорема: «Всякое непоступательное перемещение плоской фигуры в ее плоскости можно рассматривать как совокупность двух перемещений: поступательного перемещения плоской фигуры вместе с произвольно выбранной основной точкой (полюсом), и поворота (вращательного движения) вокруг основной точки (полюса), причем, направление и угол поворота не зависят от выбора основной точки. Поступательное же движение зависит от выбора полюса».

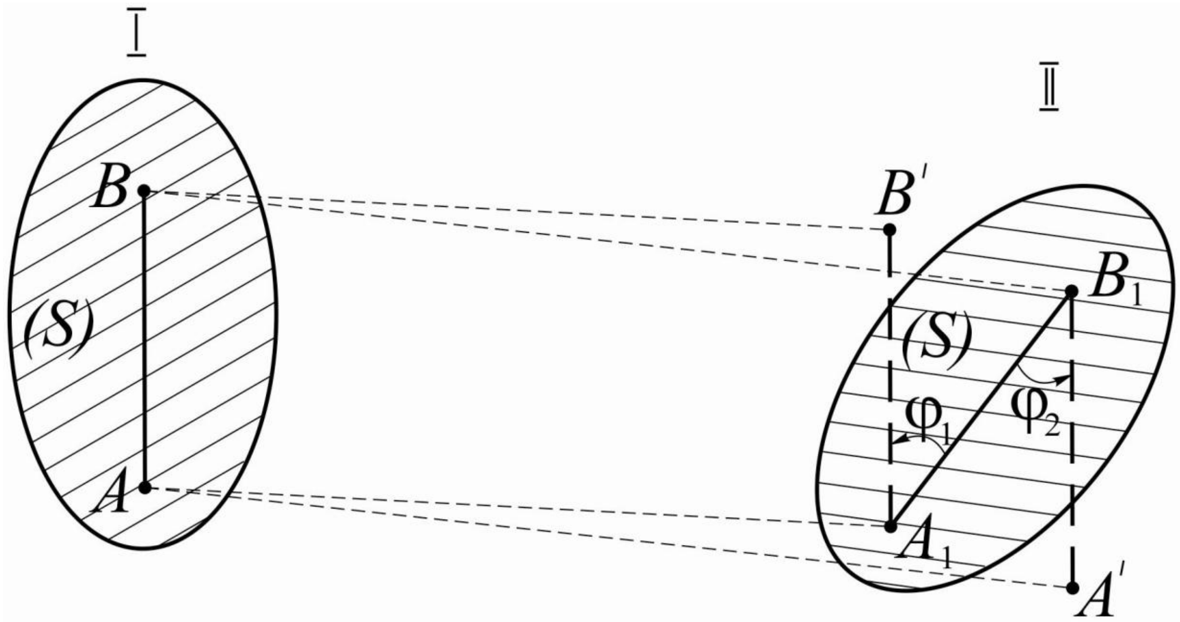


Рисунок 18

Возьмем плоскую фигуру (S) (положение I) (рисунок 18). Выберем произвольно две точки A и B и соединим их прямолинейным отрезком AB. Теперь предположим, что фигура (S) переместилась из положения I в положение II. Покажем, что такое перемещение возможно осуществить совокупностью двух движений: поступательного и вращательного.

Вначале возьмем за полюс точку A и переместим фигуру поступательно из положения AB в положение A_1B'. Затем повернем фигуру вокруг точки A_1 на угол φ_1 так, чтобы точка B' совпадала с точкой B_1.

Возьмем теперь за полюс точку B и переместим фигуру поступательно из положения AB в положение $A'B_1$, а затем повернем ее вокруг точки B_1 на угол φ_2 так, чтобы точка A' совпадала с точкой A_1.

Как мы убедились, плоское движение действительно можно осуществлять совокупностью поступательного и вращательного перемещений. При этом, было видно, что поступательное движение плоской фигуры различно в различных вариантах, а величина и направление поворота одинаковы: $\varphi_1=\varphi_2$ – как внутренние накрест лежащие углы.

Следует отметить, что вариантов перемещений плоской фигуры (S) может быть столько, сколько точек у этой плоской фигуры, т. е. бесчисленное множество.

3.3. Определение скоростей точек плоской фигуры при ее плоском движении

Существуют следующие способы определения скоростей точек твердого тела при плоском движении:

1) С помощью теоремы о скоростях точек плоской фигуры;

2) С помощью теоремы о проекциях скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую эти точки;

3) С помощью мгновенного центра скоростей;

4) С помощью построения планов скоростей.

Мы рассмотрим лишь первые три способа. Четвертый способ будет рассмотрен в курсе «Теория механизмов и машин».

3.3.1. Теорема о скоростях точек плоской фигуры.

<u>Теорема</u>: «Скорость любой точки плоской фигуры в любой момент времени геометрически слагается из скорости основной точки (полюса) и скорости относительного вращения наблюдаемой точки вокруг основной».

Согласно теореме, которая была доказана выше, плоское движение можно разложить на поступательное, со скоростью основной точки, и вращательное, вокруг этой точки.

Зная скорость поступательного движения и угловую скорость вращательного движения, можно легко определить скорость любой точки плоской фигуры.

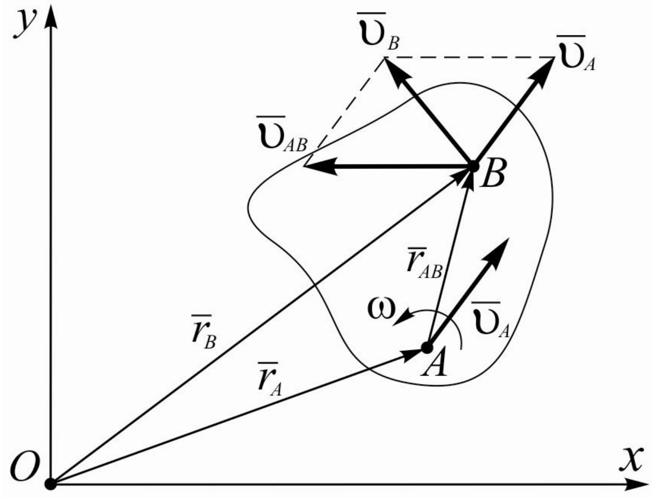


Рисунок 19

Пусть задана скорость полюса (точка *A*) υ_A и угловая скорость ω вращения тела относительно полюса (рисунок 19). Определим скорость любой другой точки плоской фигуры, например, т. *B*.

Для этого проведем из неподвижной т. *O* радиус-векторы r_A и r_B. Проведем также радиус-вектор r_{BA} из полюса *A* в точку *B*.

Т. к. радиус-вектор r_{BA} соединяет две точки неизменяемой плоской фигуры, то за все время движения он вращается вокруг полюса с угловой скоростью ω, не изменяясь по модулю.

Причем во время движения сохраняется равенство (из векторного Δ*OAB*)

$$\boxed{r_B = r_A + r_{BA}}, \qquad (51)$$

где модуль r_{BA}= *const*.

Дифференцируя выражение (51), получим

$$\frac{dr_B}{dt} = \frac{dr_A}{dt} + \frac{dr_{BA}}{dt} \qquad (52)$$

Откуда

$$\boxed{\upsilon_B = \upsilon_A + \upsilon_{BA}} \qquad (53)$$

Причем $\upsilon_{BA}= r_{BA}\cdot$ ω, и $\upsilon_{BA} \perp r_{BA} \perp AB$.

3.3.2. Теорема о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры (тела).

Эта теорема является следствием из теоремы о скоростях, практическое применение которой иногда связано с довольно сложными расчетами.

<u>Теорема</u>: «Проекции скоростей двух точек плоской фигуры, напрямую соединяющую эти точки, равны между собой».

Рассмотрим какие - нибудь две точки *A* и *B* плоской фигуры (рисунок 20). Пусть в данный момент времени известны υ_A и ω. Определим скорость точки *B*.

Принимая точку *A* за основную точку (полюс), по теореме о скоростях запишем

$$\upsilon_B = \upsilon_A + \upsilon_{BA}, \qquad (54)$$

где υ_{BA}= ω·*AB*.

Спроектируем равенство (54) на *AB*, учитывая, что вектор $\upsilon_{BA} \perp AB$.

$$\boxed{\upsilon_B \cdot \cos\beta = \upsilon_A \cdot \cos\alpha} \qquad (55)$$

Или *Ac* = *Bd* (что и требовалось доказать).

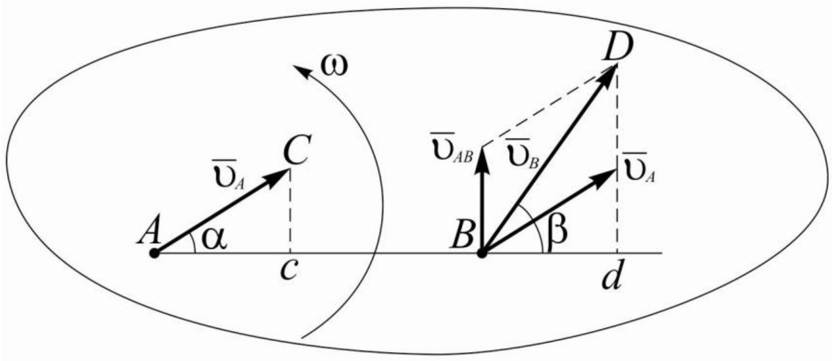


Рисунок 20

Часто теорему о проекциях скоростей двух точек записывают в виде

$$\boxed{\text{пр}_{AB}\upsilon_B = \text{пр}_{AB}\upsilon_A} \qquad (56)$$

3.3.3. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей (МЦС).

<u>Мгновенным центром скоростей</u> (МЦС) называется точка, неизменно связанная с плоской фигурой, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Пусть в момент времени t точки A и B плоской фигуры имеют скорости υ_A и υ_B, векторы которых не параллельны (рисунок 21). Восстановим в этих точках перпендикуляры к векторам скоростей до их пересечения. Докажем, что т. P будет являться МЦС, т. е. $\upsilon_P = 0$.

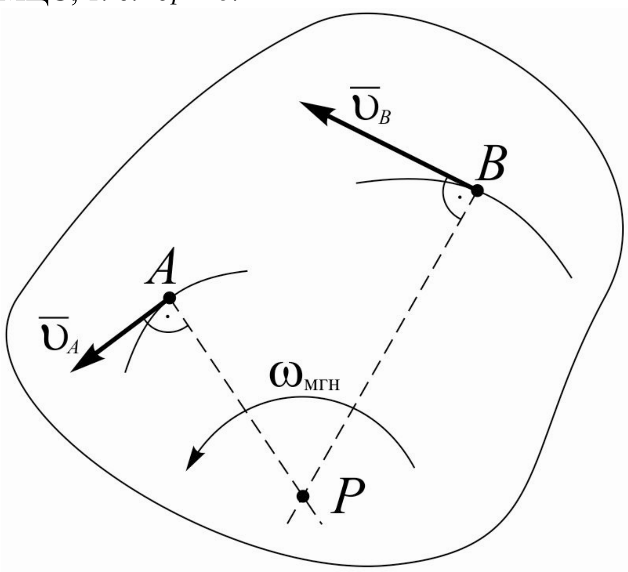


Рисунок 21

По теореме о проекциях скоростей двух точек

$\text{пр}_{AP}\upsilon_A = \text{пр}_{AP}\upsilon_P$ и $\text{пр}_{PB}\upsilon_B = \text{пр}_{PB}\upsilon_P$.

Т. е. из приведенных равенств следует, что вектор скорости т. P должен быть одновременно перпендикулярен двум пересекающимся прямым AP и BP, что невозможно, следовательно, $\upsilon_P = 0$.

Т. к. $\upsilon_A = \omega_{\text{мгн}} \cdot PA$, а $\upsilon_B = \omega_{\text{мгн}} \cdot PB$, то

$$\boxed{\frac{\upsilon_A}{\upsilon_B} = \frac{PA}{PB}} \text{ или } \boxed{\frac{\upsilon_A}{PA} = \frac{\upsilon_B}{PB}}$$

Т. е. скорости точек плоской фигуры пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенного центра скоростей.

<u>Различные случаи определения положения МЦС:</u>

1) Общий случай. Если известны скорости двух точек плоской фигуры (рисунок 22), то МЦС находится на пересечении перпендикуляров к векторам скоростей этих точек.

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{PA}$$

Если модуль скорости точки *B* не известен, то его можно определить из соотношения $\frac{\upsilon_B}{\upsilon_A} = \frac{PB}{PA} \rightarrow \upsilon_B = \frac{\upsilon_A \cdot PB}{PA}$ или при помощи угловой скорости $\upsilon_B = PB \cdot \omega$.
Скорость любой другой точки определяется аналогично.

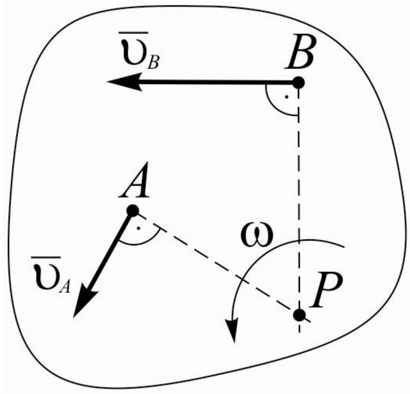


Рисунок 22

2) Скорости т. А и т. В плоской фигуры параллельны между собой и перпендикулярны *AB* (рисунок 23). В этом случае должны быть известны модули скоростей т. *A* и т. *B*.

Известно, что $\frac{\upsilon_B}{\upsilon_A} = \frac{PB}{PA}$. Следовательно, концы векторов скоростей точек *A* и *B* лежат на прямой, проходящей через МЦС. Пересечение этой прямой с прямой *AB* и определяет МЦС плоской фигуры.

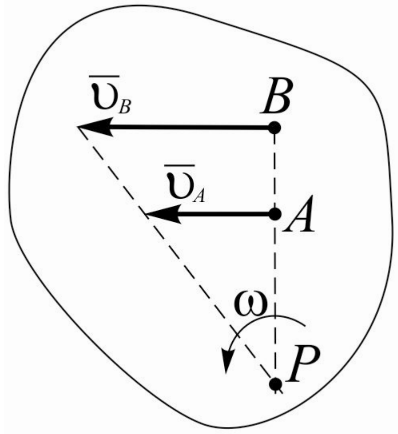


Рисунок 23

3) Скорости т. А и т. В также параллельны между собой и перпендикулярны *AB*, но направлены в разные стороны. В этом случае МЦС находится аналогичным образом с аналогичным доказательством (см. рисунок 24).

4) Скорости т. *A* и т. *B* плоской фигуры равны, параллельны между собой и перпендикулярны *AB* (рисунок 25). В этом случае МЦС находится в бесконечности ($AP = \infty$), а угловая скорость фигуры $\omega = \frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{\upsilon_A}{\infty} = 0$;

$$\upsilon_A = \upsilon_B \ ;$$
$$\upsilon_A \parallel \upsilon_B \ ;$$
$$\upsilon_A = \upsilon_B \ .$$

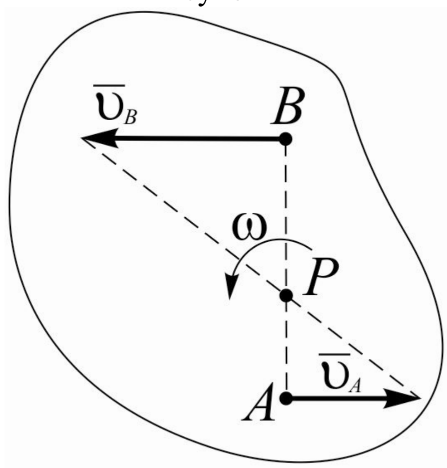


Рисунок 24

Т. е. плоская фигура совершает мгновенное поступательное движение.

Аналогичные рассуждения можно привести и для случая, если υ_A и υ_B не перпендикулярны к *AB* (рисунок 26).

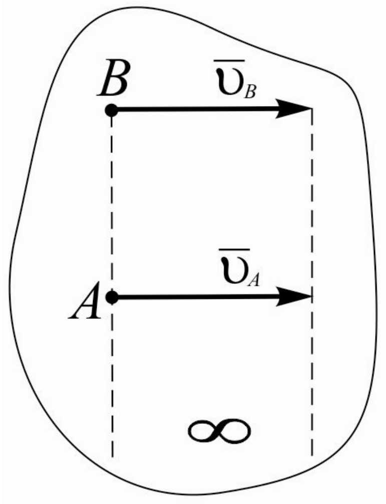


Рисунок 25

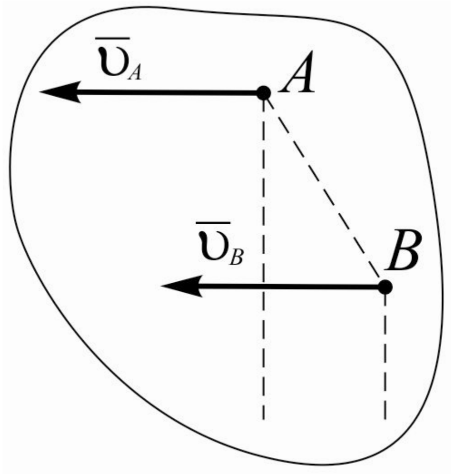


Рисунок 26

5) Случай качения плоской фигуры без скольжения по некоторой неизвестной линии (кривой или прямой) (рисунок 27).

В этом случае МЦС плоской фигуры находится в точке ее соприкосновения с линией. Это очевидно, т. к., при отсутствии скольжения, скорость точки соприкосновения плоской фигуры по соотношению к неподвижной линии равна нулю, т. е. эта точка в данный момент времени является МЦС.

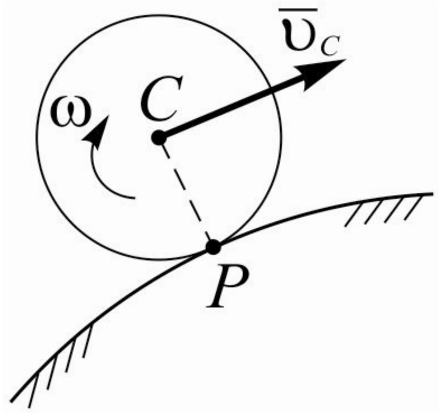


Рисунок 27

3.4. Определение ускорений точек плоской фигуры при ее плоском движении

Существует три способа определения ускорений точек плоской фигуры:

1) С помощью теоремы об ускорениях точек плоской фигуры;
2) С помощью мгновенного центра ускорений;
3) С помощью планов ускорений.

Мы рассмотрим первые два способа. Третий способ рассматривается в курсе «Теория механизмов и машин».

3.4.1. Теорема об ускорениях точек плоской фигуры.

<u>Теорема</u>: «Ускорение любой точки неизменяемой плоской фигуры геометрически слагается из полного ускорения основной точки (полюса) и полного ускорения наблюдаемой точки в ее относительном вращении вокруг основной».

Т. е. $\boxed{a_B = a_A + a_{BA}}$ (57)

Для установления этой зависимости, допустим, что известно ускорение т. A (полюса) плоской фигуры, а также ω и ε (рисунок 28). Предположим, что данная фигура вращается ускоренно.

Определим ускорение любой точки, например, т. B фигуры, приняв т. A за полюс.

Проведем из неподвижной точки O радиус-векторы r_A и r_B. Проведем также радиус-вектор r_{BA} из полюса A в точку B. Очевидно r_{BA}= *const*, т. к. соединяет две точки неизменяемой плоской фигуры.

Во все время движения сохраняется равенство (из векторного ΔAOB):

$$\boxed{r_B = r_A + r_{BA}} \quad (58)$$

Продифференцируем дважды по времени выражение (58)

$$\frac{d^2 r_B}{dt^2} = \frac{d^2 r_A}{dt^2} + \frac{d^2 r_{BA}}{dt^2} \quad (59)$$

Откуда $\boxed{a_B = a_A + a_{BA}}$, что и требовалось доказать.

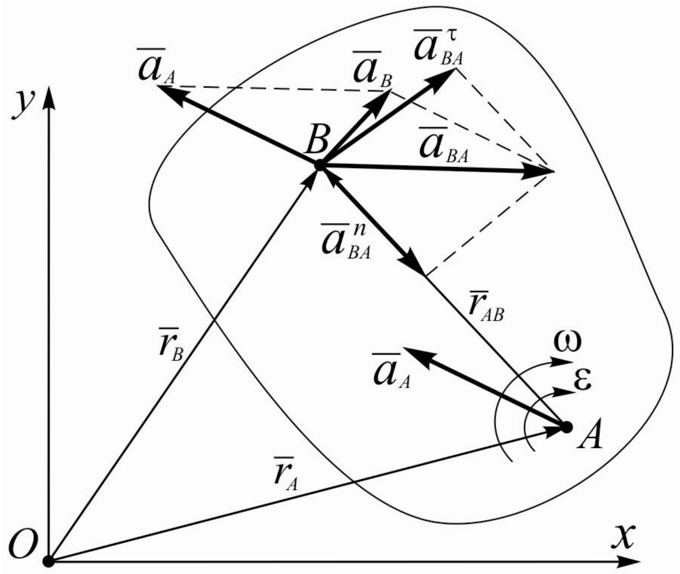


Рисунок 28

Известно, что a_{BA}=$a^{\tau}_{BA} + a^{n}_{BA}$.

Тогда выражение (57) можно переписать следующим образом:

$$\boxed{a_B = a_A + a^{\tau}_{BA} + a^{n}_{BA}} \quad (60)$$

Причем, a^{n}_{BA}=ω^2·*AB*; вектор a^{n}_{BA} параллелен *AB* и направлен к полюсу (т. *A*);

a^{τ}_{BA}=ε·*AB*; вектор a^{τ}_{BA} перпендикулярен *AB* и направлен в сторону направления углового ускорения ε.

Если представить ускорение т. *A* как a_A=a^{n}_{A}+a^{τ}_{A}, то

$$\boxed{a_B = a^{n}_{A} + a^{\tau}_{A} + a^{\tau}_{BA} + a^{n}_{BA}} \quad (61)$$

При решении задач векторное уравнение (61) необходимо проектировать на выбранную систему координат. В этом случае

$$a_B = \sqrt{a^2_{Bx} + a^2_{By}} ,$$

где a_{Bx} и a_{By} – проекции ускорения т. *B* на координатные оси *x* и *y*.

3.4.2. Определение ускорений точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра ускорений.

<u>Мгновенным центром ускорений</u> (м. ц. у.) называется такая точка, неизменно связанная с движущейся плоской фигурой, ускорение которой в данный момент равно нулю.

Докажем, что такая точка существует. Из теоремы об ускорениях точек плоской фигуры известно, что

$$a_A = a_O + a_{AO} = a_O + a^{n}_{AO} + a^{\tau}_{AO} ,$$

где a^{n}_{AO} =ω^2·*OA* , а a^{τ}_{AO}=ε·*OA*

Пусть дано ускорение основной точки и угловые скорость и ускорение относительно вращения данной (наблюдаемой) точки вокруг основной (рисунок 29).

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{a^{\tau}_{AO}}{a^{n}_{AO}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \rightarrow \alpha_1 = \mathrm{arctg}\frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (62)$$

Возьмем теперь произвольно другую точку *B*. По аналогии для этой точки будем иметь

$$a_B = a_O + a_{BO} = a_O + a^{n}_{BO} + a^{\tau}_{BO} ,$$

где $a_{BO}^{n} = \omega^2 \cdot OB$, а $a_{BO}^{\tau} = \varepsilon \cdot OB$.

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{a_{BO}^{\tau}}{a_{BO}^{n}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \rightarrow \alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (63)$$

Вывод: т. к. ω и ε для всех точек плоской фигуры одинаковы, то из сравнения выражений (62) и (63) следует, что и угол α для всех этих точек один и тот же, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.

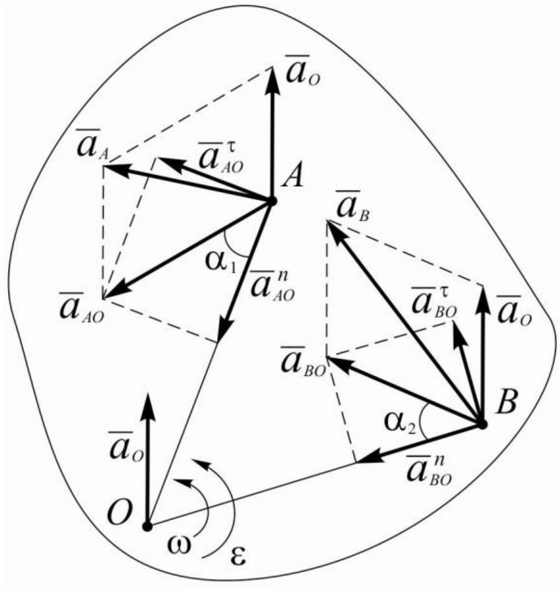


Рисунок 29

Докажем теперь непосредственно существование м. ц. у.

Пусть снова в данный момент времени известны: ускорение некоторой точки O - a_O и угловые скорость ω и ускорение ε вращения плоской фигуры вокруг этой точки (рисунок 30). Будем считать т. O – основной точкой (полюсом) и определяем следующее:

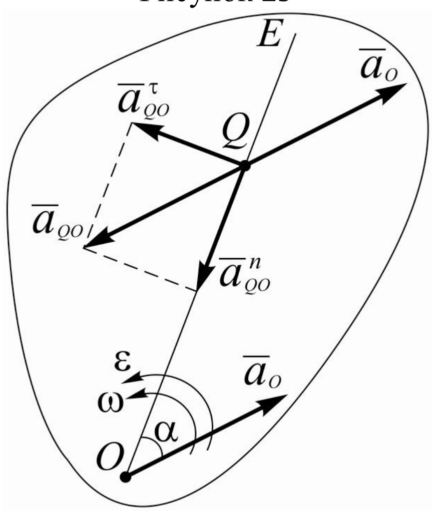


Рисунок 30

1) Построим в произвольно выбранном масштабе ускорений μ_a вектор ускорения основной точки O.

2) Определим угол α = $\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\omega^2}$

3) Отложим угол α от вектора a_O в направлении ε и проведем полупрямую OE.

4) На полупрямой OE в линейном масштабе μ_l отложим в сторону т. E отрезок

$$OQ = \frac{a_O}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \qquad (64)$$

5) Определим ускорение т. Q

$$a_Q = a_O + a_{QO}^{n} + a_{QO}^{\tau}, \qquad (65)$$

где $a_{QO}^{n} = \omega^2 \cdot OQ$, а $a_{QO}^{\tau} = \varepsilon \cdot OQ$, причем

$$a_{QO} = \sqrt{\left(a_{QO}^{\tau}\right)^2 + \left(a_{QO}^{n}\right)^2} = OQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (66)$$

Подставляя выражение (64) в (66), получим

$a_{QO} = \frac{a_O}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}} \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_O$, т. е. $a_{QO} = a_O$.

Причем $\operatorname{tg}\beta = \frac{a_{QO}^{\tau}}{a_{QO}^{n}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$. Это говорит о том, что углы α и β равны.

Следовательно, $a_{QO} = -a_O$.

Подставим теперь значение a_{QO} в уравнение (65)

$$a_Q = a_O - a_O = 0.$$

Это означает, что т. Q является м. ц. у.

Из изложенного выше следует, что для того, чтобы построить для данного положения плоской фигуры или плоского механизма м. ц. у., нужно:

1) В произвольно выбранном линейном масштабе μ_l построить схему механизма.

2) В произвольно выбранном масштабе ускорений μ_α построить вектор полного ускорения основной точки (полюса).

3) От вектора полного ускорения основной точки в направлении углового ускорения ε отложить угол α= $\mathrm{arctg}\frac{\varepsilon}{\omega^2}$ и под этим углом провести полупрямую OE.

4) На полупрямой OE отложить в масштабе μ_l отрезок $OQ = \frac{a_O}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}}$.

При этом т. Q будет являться м. ц. у.

Зная положение м. ц. у., ускорения точек плоской фигуры можно определить следующим образом:

1) М. ц. у. (т. Q) принимают за основную точку (рисунок 31).

2) Для наблюдаемой точки, например т. A, записывают теорему об ускорениях

$$a_A = a_Q + a_{AQ} = a_Q + a_{AQ}^n + a_{AQ}^\tau \ , \qquad (67)$$

где $a_Q = 0$, $a_{AQ}^n = \omega^2 \cdot AQ$, а $a_{AQ}^\tau = \varepsilon \cdot AQ$, $a_A = a_{AQ}$.

3) Определим ускорение т. A

$$a_A = a_{AQ} = AQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad (68)$$

4) Определяют угол α = $\mathrm{arctg}\frac{\varepsilon}{\omega^2}$.

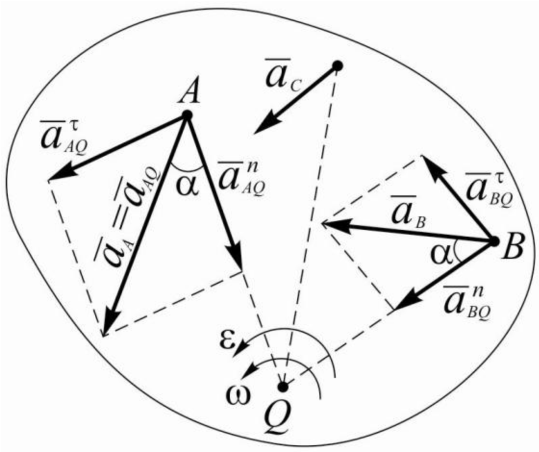


Рисунок 31

Аналогично для любой другой точки, например, т. B.

$$a_B = a_{BQ} = BQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad (69)$$

Поделим выражение (68) на (69):

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{AQ}{BQ} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ} = \frac{a_C}{CQ} = \cdots}$$

Т.е. ускорение точки движущейся плоской фигуры прямо пропорционально расстояниям от этих точек до МЦУ. При этом векторы ускорений точек a_A, a_B, a_C и др. направлены к своим отрезкам до МЦУ под одним и тем же углом α в одну сторону.

Следует иметь в виду, что положение МЦС (т. P) и МЦУ (т. Q) в данный момент времени не совпадают.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение твердого тела называется плоскопараллельным? Запишите уравнение плоскопараллельного движения.
2. Назовите формулировку и доказательство теоремы о разложении плоского движения на поступательное и вращательное.
3. Какие существуют способы определения скоростей точек твердого тела, совершающего плоское движение?
4. Назовите формулировку и доказательство теоремы о скоростях точек твердого теля, совершающего плоское движение.
5. Дайте определение мгновенного центра скоростей. Перечислите различные случаи определения положения мгновенного центра скоростей.
6. Как можно определить скорости точек плоской фигуры при помощи мгновенного центра скоростей?
7. Назовите формулировку и доказательство теоремы о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер . – М. : Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
2. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика [Текст]: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 12-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 672 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1035-4 .
3. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.
4. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике[Текст]: Учебное пособие /И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
5. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная

1. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. –Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
2. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
3. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.

Лекция 4

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ (ТЕЛА)

4.1. Относительное, переносное и абсолютное движение точки

Ранее мы рассматривали движение точки или твердого тела по отношению к некоторой неподвижной системе координат. Но иногда приходится рассматривать движение точки по отношению к некоторой системе координат, которая сама двигается относительно условно неподвижной системы координат. В этом случае говорят, что точка или тело совершает сложное (составное) движение.

Т. о., сложным (составным, абсолютным) называется такое движение точки или тела, при котором эта точка одновременно участвует в двух (или нескольких) движениях: по отношению к подвижной системе координат и вместе с подвижной системой относительно неподвижной системы координат.

Например, в вагоне идущего трамвая от задней двери к передней двигается пассажир. За неподвижную систему отсчета примем систему, жестко связанную с землей, а за подвижную систему отсчета примем систему, жестко связанную с вагоном.

Пассажир, перемещаясь вдоль идущего вагона, совершает сложное движение, которое можно разложить на два более простых движения: движение пассажира относительно вагона (относительно подвижной системы координат) – относительное движение, и движение вагона (подвижной системы отсчета) относительно земли (неподвижной системы отсчета) – переносное движение. Движение же пассажира относительно земли (неподвижной системы отсчета) называется (есть) абсолютное движение.

Другой пример. Человек идет по вращающейся платформе от центра к переферии. В этом случае движение человека относительно платформы – относительное движение. Движение вращения платформы относительно земли – сложное (абсолютное) движение. Т. о., можно заключить: «Движение точки относительно подвижной системы отсчета называется относительным движением точки». При этом скорость и ускорение точки в относительном движении называют относительной скоростью и относительным ускорением и обозначают υ_r и a_r (*relatif* – относительный).

«Движение подвижной системы отсчета и неизменно связанной с ней точкой (телом) по отношению к неподвижной системе отсчета называется переносным движением точки». При этом скорость и ускорение точки (тела), связанного с подвижной системой отсчета и совпадающей в данный момент с движущейся точкой, называют переносной скоростью и переносным ускорением точки, и обозначают υ_e и a_e (*emporter* – увлекать).

В случае с платформой, переносной скоростью человека и его переносным ускорением являются скорость и ускорение той точки платформы, где находится в данный момент человек.

«Движение точки относительно неподвижной системы отсчета называется абсолютным (сложным, составным)».

Скорость и ускорение в абсолютном движении называют абсолютной скоростью и абсолютным ускорением точки, и обозначают υ и a.

Основная задача изучения сложного движения состоит в установлении зависимости между скоростями и ускорениями относительного, переносного и абсолютного движений точки. Зная эту зависимость, можно по относительному и переносному движению определить ее абсолютное движение. Или наоборот, зная абсолютное движение, можно определить или переносное или относительное, т. е. можно расчленить его на составные. Выше упомянутые зависимости основаны на теоремах о сложении скоростей и ускорений в сложном движении.

4.2. Теорема о сложении скоростей точки, совершающей сложное движение

Теорема: «В случае сложного движения точки, ее абсолютная скорость геометрически складывается из переносной и относительной скоростей».

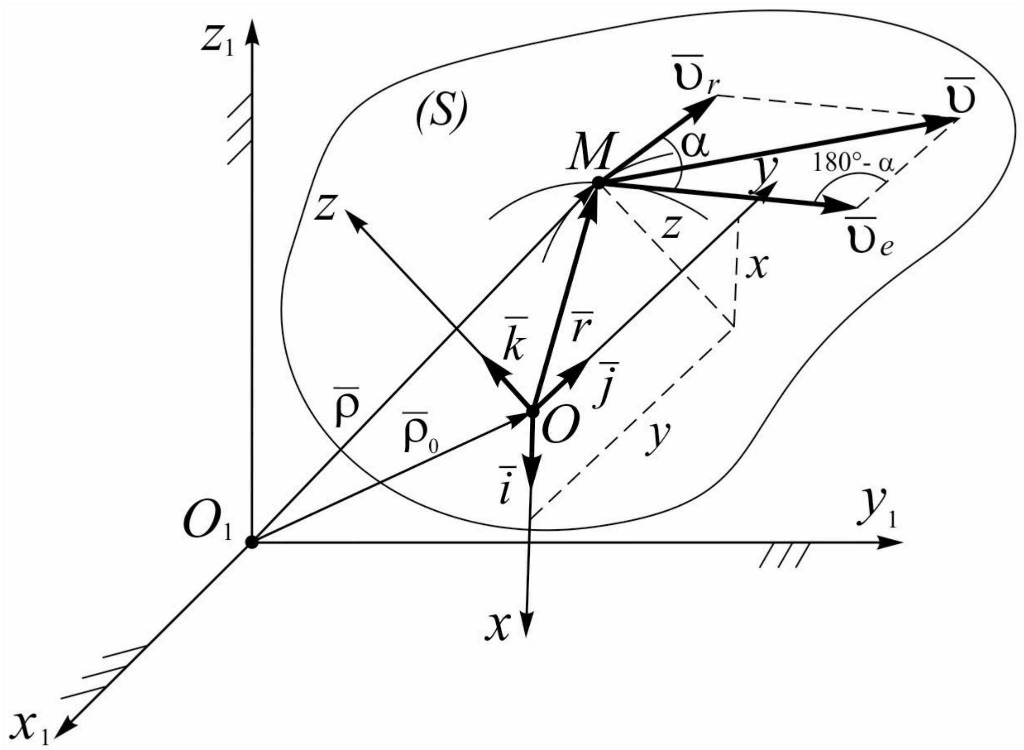


Рисунок 32

Т. O – начало подвижной системы координат (рисунок 32). Т. O_1 – начало неподвижной системы координат. ($\imath$, $\jmath$, k) – осевые орты подвижной системы координат. Рассмотрим сложное движение точки M. x, y, z – декартовы координаты т. M в подвижной системе отсчета. Разложим радиус-вектор r по координатным осям:

$$r=x\cdot\imath+y\cdot\jmath+z\cdot k$$

1) Рассмотрим только относительное движение точки, забыв о переносном. В этом случае ($\imath$, $\jmath$, k)=$const$, x, y, $z\neq const$.

$$\boxed{\upsilon_r = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot\imath + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\jmath + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\cdot k}$$

2) Рассмотрим теперь только переносное движение, забыв об относительном. В этом случае x, y, $z=const$, ($\imath$, $\jmath$, k) $\neq const$.

Из ΔOMO_1

$$\rho = \rho_0 + r = \rho_0 + x\cdot\imath + y\cdot\jmath + z\cdot k$$

$$\boxed{\upsilon_e = \frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}t} + x\cdot\frac{\mathrm{d}\imath}{\mathrm{d}t} + y\cdot\frac{\mathrm{d}\jmath}{\mathrm{d}t} + z\cdot\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}}$$

3) Рассмотрим абсолютное движение точки. В этом случае все параметры будут переменными

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}, \text{ где } \rho=\rho_0+ x\cdot\imath+y\cdot\jmath+z\cdot k$$

$$\upsilon=\underbrace{\frac{d\rho_0}{dt}+x\cdot\frac{d\imath}{dt}+y\cdot\frac{d\jmath}{dt}+z\cdot\frac{dk}{dt}}_{\upsilon_e}+\underbrace{\frac{dx}{dt}\cdot\imath+\frac{dy}{dt}\cdot\jmath+\frac{dz}{dt}\cdot k}_{\upsilon_r}$$

$$\boxed{\upsilon=\upsilon_e+\upsilon_r}$$

По теореме косинусов:

$$\upsilon=\sqrt{\upsilon_e^2+\upsilon_r^2-2\upsilon_e\cdot\upsilon_r\cdot\cos(180°-\alpha)}$$

$$\boxed{\upsilon=\sqrt{\upsilon_e^2+\upsilon_r^2+2\upsilon_e\cdot\upsilon_r\cdot\cos\alpha}}$$

4.3. Теорема о сложении ускорений точки, совершающей сложное движение (теорема Кориолиса)

При доказательстве теоремы о сложении скоростей точки, совершающей сложное движение, было получено:

$$\upsilon=\underbrace{\frac{d\rho_0}{dt}+x\cdot\frac{d\imath}{dt}+y\cdot\frac{d\jmath}{dt}+z\cdot\frac{dk}{dt}}_{\upsilon_e}+\underbrace{\frac{dx}{dt}\cdot\imath+\frac{dy}{dt}\cdot\jmath+\frac{dz}{dt}\cdot k}_{\upsilon_r} \qquad (70)$$

$$\boxed{\upsilon=\upsilon_e+\upsilon_r}$$

Определим абсолютное ускорение точки, совершающей сложное движение $a=\frac{d\upsilon}{dt}$.

Учитывая, что в выражение (70) входят все переменные величины, определим абсолютное ускорение точки:

$$a=\underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\imath+\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\jmath+\frac{d^2z}{dt^2}\cdot k}_{a_r}+\underline{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\imath}{dt}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\jmath}{dt}+\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dk}{dt}}+$$

$$+\underbrace{\frac{d^2\rho_0}{dt^2}+x\cdot\frac{d^2\imath}{dt^2}+y\cdot\frac{d^2\jmath}{dt^2}+z\cdot\frac{d^2k}{dt^2}}_{a_e}+\underline{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\imath}{dt}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\jmath}{dt}+\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dk}{dt}}$$

$$a=a_r+a_e+2\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\imath}{dt}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\jmath}{dt}+\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dk}{dt}\right)$$

$$\boxed{a=a_r+a_e+a_k},$$

где $a_k=2\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\imath}{dt}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\jmath}{dt}+\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dk}{dt}\right)$ – ускорение Кориолиса (поворотное); в случае поступательного переносного движения ($\imath$, $\jmath$, k)=*const*, $a_k=0$.

Теорема: Абсолютное ускорение точки, совершающей сложное движение, геометрически складывается из относительного, переносного и поворотного (Кориолисова) ускорений.

В развернутом виде теорему Кориолиса можно записать в следующем виде:

$$\boxed{a=a_r^n+a_r^\tau+a_e^n+a_e^\tau+a_k}$$

При решении задач, это векторное уравнение необходимо проектировать на выбранную систему координат.

4.4. Модуль и направление вектора ускорения Кориолиса

В случае сложного движения точки *M* ее переносное движение можно представить как плоское движение, которое можно разложить на поступательное движение со скоростью основной точки и вращательное движение точки *M* вокруг оси, проходящей через основную точку (рисунок 33).

Скорость переменного движения точки M

$$\upsilon_e = \frac{d\rho_0}{dt} + x\cdot\frac{d\imath}{dt} + y\cdot\frac{d\jmath}{dt} + z\cdot\frac{dk}{dt},$$

где $\frac{d\rho_0}{dt} = \upsilon_O$

Следовательно,

$$\upsilon_e = \upsilon_O + x\cdot\frac{d\imath}{dt} + y\cdot\frac{d\jmath}{dt} + z\cdot\frac{dk}{dt}. \qquad (71)$$

С другой стороны, переносная скорость точки M (из теории плоского движения)

$$\upsilon_e = \upsilon_O + \upsilon_{M(Oz)},$$

где $\upsilon_{M(Oz)}$ - линейная скорость точки M во вращательном движении вокруг оси Oz.

По формуле Эйлера $\upsilon_{M(Oz)} = \omega_e \times r$.

Тогда $\upsilon_e = \upsilon_O + (\omega_e \times r)$. (72)

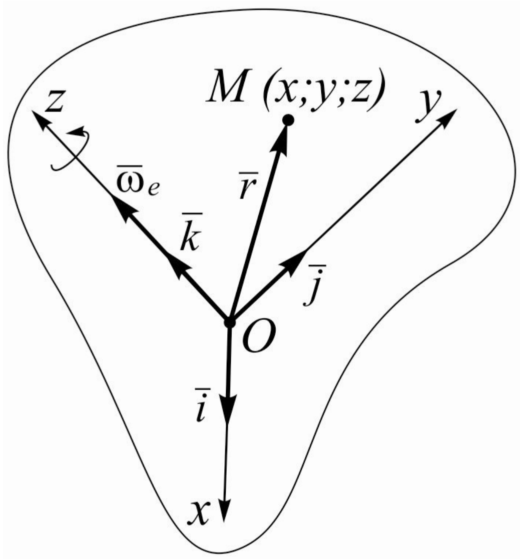


Рисунок 33

Сравним два выражения (71) и (72):

$$x\cdot\frac{d\imath}{dt} + y\cdot\frac{d\jmath}{dt} + z\cdot\frac{dk}{dt} = \omega_e \times r,$$

где $x=r_x$, $y=r_y$, $z=r_z$, т. е.

$$r_x\cdot\frac{d\imath}{dt} + r_y\cdot\frac{d\jmath}{dt} + r_z\cdot\frac{dk}{dt} = \omega_e \times r. \qquad (73)$$

Как было показано выше, ускорение Кориолиса

$$a_k = 2\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\imath}{dt} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\jmath}{dt} + \frac{dz}{dt}\cdot\frac{dk}{dt}\right)$$

или

$$a_k = 2\left[\upsilon_{rx}\cdot\frac{d\imath}{dt} + \upsilon_{ry}\cdot\frac{d\jmath}{dt} + \upsilon_{rz}\cdot\frac{dk}{dt}\right] \qquad (74)$$

Из сравнения выражений (73) и (74) можно записать

$$\boxed{a_k = 2(\omega_e \times \upsilon_r)}$$

<u>Вектор ускорения Кориолиса</u> равен удвоенному векторному произведению вектора угловой скорости переносного движения точки на вектор относительной скорости этой точки.

Согласно правилу векторного произведения, вектор Кориолиса всегда направлен перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы ω_e и υ_r, в ту сторону, откуда поворот вектора ω_e (первого сомножителя) до совмещения с вектором υ_r (вторым сомножителем) на меньший угол будет виден происходящим против часовой стрелки.

Для определения направления кориолисова ускорения, удобно также пользоваться <u>правилом Жуковского</u>: «Чтобы определить направление кориолисова ускорения, необходимо спроектировать вектор относительной скорости точки на плоскость, перпендикулярную к оси переносного вращения (вектору угловой переносной скорости), и повернуть эту проекцию в той же плоскости на 90° в сторону переносного вращения».

Модуль ускорения Кориолиса определяется как модуль векторного произведения:

$$\boxed{a_k = 2\omega_e\cdot\upsilon_r\cdot\sin(\omega_e;\upsilon_r)}$$

Если $\omega_e \perp \upsilon_r$, то $\sin(\omega_e;\upsilon_r)=1$, тогда

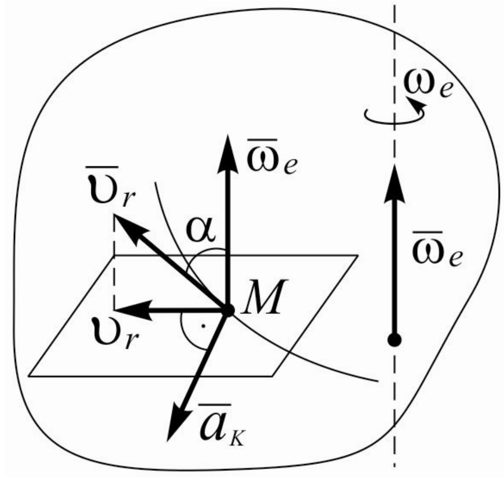


Рисунок 34

$$\boxed{a_k = 2\omega_e \cdot \upsilon_r}$$

Ускорение Кориолиса может быть равно нулю в следующих случаях:

1) Когда переносное движение точки (вместе с подвижной системой координат) является поступательным, т. е. ω_e= 0.

В этом случае $a = a_r + a_e$.

2) Когда относительная скорость равна 0, т. е. υ_r= 0, то и a_k= 0.

3) Когда $\sin(\omega_e; \upsilon_r)$=0. В этом случае $\omega_e \parallel \upsilon_r$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение точки называется сложным? Дайте определения и приведите примеры абсолютного, относительного и переносного движений.
2. Назовите формулировку теоремы о сложении скоростей точки, совершающей сложное движение.
3. Назовите формулировку теоремы о сложении ускорений точки, совершающей сложное движение (теорема Кориолиса).
4. Чему равен вектор и модуль поворотного (Кориолисова) ускорения? Как можно определить его направления (правило Жуковского)? В каких случаях ускорение Кориолиса равно нулю?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер . – М. : Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
2. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика [Текст]: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 12-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 672 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1035-4 .
3. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.
4. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике[Текст]: Учебное пособие /И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
5. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная

1. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. –Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
2. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
3. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.

Лекция 5

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОКОЛО НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Это такое движение твердого тела, при котором одна его точка все время остается неподвижной. Остальные точки движутся по сферическим поверхностям, центры которых совпадают с неподвижной точкой. Поэтому данный вид движения часто называют еще сферическим. Примером такого движения может служить вращение волчка, у которого неподвижна точка его опоры о плоскость, или движение любого твердого тела, закрепленного в одной точке шаровым шарниром.

5.1. Углы Эйлера. Уравнения вращения тела с одной неподвижной точкой

Определим, какими параметрами можно задать положение тела, имеющего одну неподвижную точку. Пусть имеется твердое тело (S), двигающееся вокруг неподвижной точки O (рисунок 35). Введем

$Oxyz$ – подвижная система координат, жестко связанная с телом;

$Ox_1y_1z_1$ – неподвижная система координат;

OK – линия узлов.

Тогда положение подвижной системы координат $Oxyz$, а с ним и самого тела, по отношению к неподвижной $Ox_1y_1z_1$ можно определить углами, получившими название углов Эйлера:

$\varphi = \angle KOx$ (угол собственного вращения);

$\psi = \angle x_1OK$ (угол прецессии);

$\theta = \angle z_1Oz$ (угол нутации).

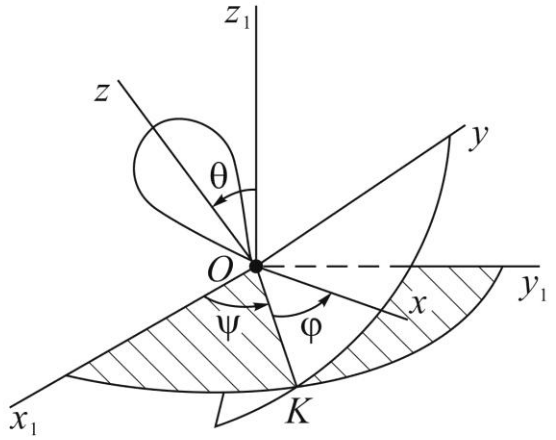


Рисунок 35

Таким образом, закон движения твердого тела вокруг неподвижной точки будет иметь вид:

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi &= f_1\ \ t\ ; \\ \psi &= f_2\ \ t\ ; \\ \theta &= f_3\ \ t\ . \end{aligned}} \qquad (75)$$

5.2. Теорема Эйлера – Даламбера. Мгновенная ось вращения

Формулировка теоремы: тело с одной неподвижной точкой можно переместить из одного положения в другое поворотом вокруг некоторой оси, проходящей через данную неподвижную точку.

Проведём в теле сферическую поверхность произвольного радиуса с центром в неподвижной точке O (рисунок 36). Покажем у тела какие-нибудь две точки A и B, расположенные на этой сфере. Соединим их по сфере дугой большого круга (дугой наименьшей кривизны на поверхности). Переместим тело в новое положение. Точки, а значит и дуга, займут положение A_1 и B_1. Соединим точки A и A_1, B и B_1 дугами большого радиуса AA_1 и BB_1.

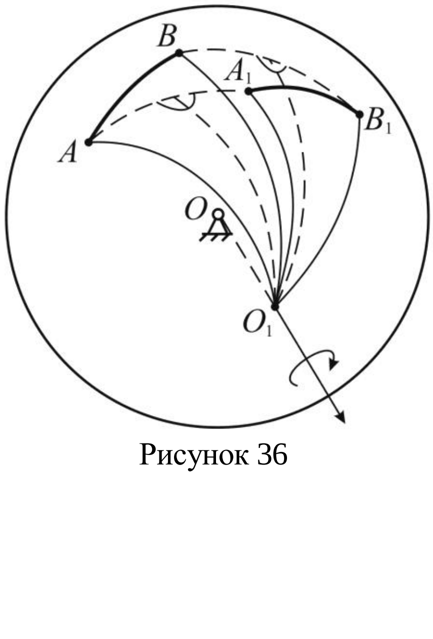


Рисунок 36

Посередине этих дуг проведём перпендикулярные им дуги и найдём их точку пересечения O_1. Соединим эту точку с точками A, A_1, B, B_1. Получим два сферических треугольника ΔABO_1 и $\Delta A_1B_1O_1$, расположенных на этой сфере. Эти два треугольника равны, как треугольники с равными сторонами ($AB = A_1B_1$, а $AO_1 = A_1O_1$ и $BO_1 = B_1O_1$ – как дуги равноудалённые от перпендикуляров). Так как эти два треугольника расположены на одной сфере и имеют общую вершину O_1, то их можно совместить поворотом сферы, а значит и тела, вокруг прямой OO_1. Теорема доказана.

Точки A и B при перемещении в положение A_1 и B_1 в общем случае не обязательно движутся по дугам большого круга. За малый промежуток времени Δt переход точек из одного положения в другое происходит поворотом тела вокруг некоторой оси вращения на угол $\Delta\varphi$. При стремлении $\Delta t \to 0$ ось вращения занимает предельное положение и называется мгновенной осью вращения тела в данный момент времени.

5.3. Мгновенная угловая скорость и мгновенное угловое ускорение

Мгновенная угловая скорость сферического движения твердого тела – вектор, направленный вдоль мгновенной оси вращения, модуль которого равен

$$\boxed{\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}}. \quad (76)$$

Причем вектор мгновенной угловой скорости будет равен:

$$\boxed{\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3}, \quad (77)$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – вектора угловых скоростей вращения вокруг осей Oz (собственное вращение), Oz_1 (прецессия) и OK (нутация) (см. рисунок 35), численно равные первым производным от соответствующих углов Эйлера повремени.

Векторная величина

$$\boxed{\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}}, \quad (78)$$

характеризующая изменение с течением времени угловой скорости и по модулю, и по направлению, называется угловым ускорением тела в данный момент времени или мгновенным угловым ускорением.

При изменении вектора ω его конец A будет описывать в пространстве некоторую кривую AA_1, являющуюся годографом вектора ω (см. рисунок 37).

Сравнивая выражение (78) с равенством $\upsilon = \frac{dr}{dt}$ можно сделать вывод, что угловое ускорение тела можно находить как линейную скорость, с которой конец вектора ω перемещается вдоль кривой AA_1.

Направление вектора ε совпадает с направлением касательной к кривой AA_1 в соответствующей точке. Следовательно, в данном случае, в отличие от случая вращения вокруг неподвижной оси, направление вектора ε не совпадает с направлением ω.

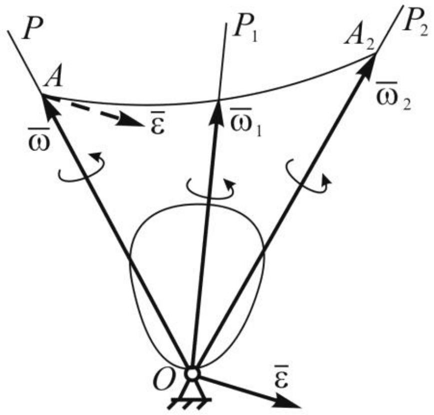


Рисунок 37

5.4. Скорости и ускорения точек тела, движущегося около неподвижной точки

На основании теоремы Эйлера – Даламбера, рассмотренной в п.5.2, скорость любой точки твердого тела, совершающего сферическое движение, можно определить как скорость при вращении точки вокруг мгновенной оси P:

$$\boxed{\upsilon = \omega \times r}, \quad (79)$$

где r – радиус-вектор, проведенный в точку M из неподвижной точки O. Направлен вектор υ перпендикулярно плоскости MOP, проходящей через точку M и мгновенную ось вращения OP, в сторону поворота тела (рисунок 38).

Направлен вектор υ перпендикулярно плоскости MOP, проходящей через точку M и ось OP, в сторону поворота тела. Численно

$$\boxed{\upsilon = \omega \cdot r \cdot \sin\,\omega; \upsilon\ = \omega \cdot h}, \quad (80)$$

где h = MC – расстояние от точки M до мгновенной оси вращения.

Чтобы определить ускорение точки M продифференцируем выражение (79) по времени:

$$a = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\ \omega \times r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \times r + \omega \times \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} =$$
$$= \varepsilon \times r + \omega \times \upsilon\,.$$

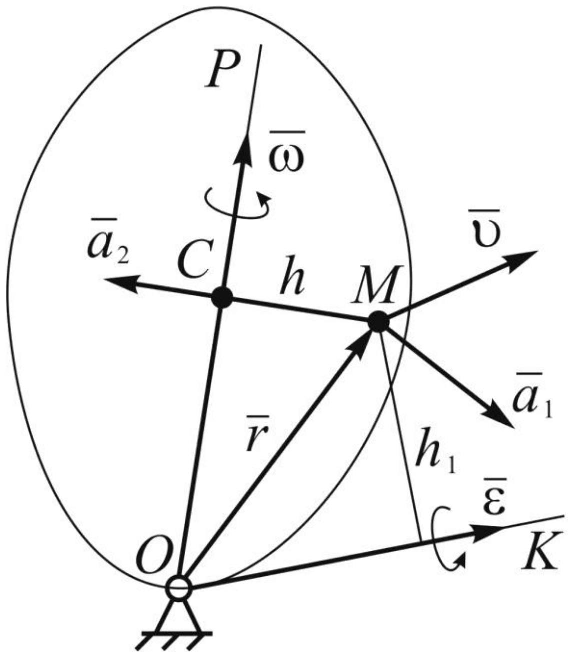


Рисунок 38

$$\boxed{a = a_1 + a_2}, \qquad (81)$$

где $a_1 = \varepsilon \times r$ – <u>вращательное</u> ускорение относительно оси мгновенного углового ускорения OK; $a_2 = \omega \times \upsilon$ – <u>осестремительное</u> ускорение относительно мгновенной оси вращения OP.

Таким образом, ускорение точки твердого тела при сферическом движении равно геометрической сумме вращательного и осестремительного ускорения.

Вектор a_1 направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через точку M и вектор ε , а по модулю $a_1 = \varepsilon \cdot h_1$, где h_1 – расстояние от точки M до вектора ε.

Вектор a_2, перпендикулярный одновременно υ и ω, направлен вдоль MC, причем по модулю $a_2 = \omega^2 \cdot h$.

Модуль полного ускорения равен:

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(a_1; a_2)}.$$

Следует отметить, что вектор a_1 не является вектором касательного ускорения точки M (по касательной направлен вектор $\upsilon = \omega \times r$, а направление вектора $a_1 = \varepsilon \times r$ будет другим). Следовательно, и вектор $a_2 = \omega \times \upsilon$ не будет вектором нормального ускорения точки M.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение точки называется сферическим? Приведите примеры.
2. Запишите уравнение сферического движения. Какие углы называются углами Эйлера?
3. Приведите формулировку и доказательство теоремы Эйлера – Даламбера. Какая ось называется мгновенной осью вращения?
4. Как определяются мгновенная угловая скорость и ускорение твердого тела при сферическом движении?

5. Чему равен вектор и модуль скорости точек твердого тела, движущегося около неподвижной точки?
6. Какие ускорения называются вращательным и осестремительным? Чему они равны? Как с их помощью найти вектор и модуль ускорения точек твердого тела, совершающего сферическое движение?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. **Тарг, С.М.** Краткий курс теоретической механики [Текст]: учебник для втузов / С. М. Тарг. – 19-е изд., стер . – М. : Высшая школа, 2009 . – 416 с. - ISBN 978-5-06-006114-7.
2. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. Статика и кинематика [Текст]: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 12-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 672 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1035-4 .
3. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2. Динамика : учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2013 . – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) . - ISBN 978-5-8114-1021-7.
4. **Мещерский, И.В.**Задачи по теоретической механике[Текст]: Учебное пособие /И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 50-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 448 с.: ил. ; 22 см. – 3000 экз. – ISBN 978-5-9511-0019-1.
5. **Яблонский, А.А.** Курс теоретической механики [Текст]: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – М.: КНОРУС, 2011. – 608 с.: ил. ; 25 см. – Библиогр.: с. 597. – Предм. указ.: с. 598. – 2000 экз. – ISBN 978-5-406-01977-1.

Дополнительная

1. **Никитин, Е.М.** Теоретическая механика для техникумов [Текст]/ Е.М. Никитин. – 12-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.1988(не переиздавалась). – 336 с.: ил. ; 22 см. –Предм. указ.: с. 334–336. – 240000 экз. – ISBN5-02-013815-0.
2. **Павлов, В.Е.** Теоретическая механика [Текст]: учеб.пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.Е. Павлов, Ф.А. Доронин. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 320 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 308. – 3000 экз. – ISBN 978-5-7695-2834-7.
3. **Болотин, С.В.** Теоретическая механика [Текст]: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. – М.: Издательский центр «Академия», 2010. – 432 с.: ил. ; 22 см. – Библиогр.: с. 400–401. – Предм. указ.: с. 416–421. – 1200 экз. – ISBN 978-5-7695-5946-4.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Бать, М.И., Джанелидзе, Г.Ю., Кельзон, А.С.** Теоретическая механика в примерах и задачах. – 9-е изд., стер. / Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. – СПб.: Лань, 2010 г.
2. **Бутенин, Н.В., Лунц, Я.Л., Меркин, Д.Р.** Курс теоретической механики: учебник / Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. – СПб.: Лань, 2008 г.
3. **Лачуга, Ю.Ф., Ксендзов, В.А.** Теоретическая механика: учебник / Лачуга Ю.Ф., Ксендзов В.А. – М.: Колос, 2000 г.
4. **Никитин, Н.Н.** Курс теоретической механики: учебник / Никитин Н.Н. – М.: Высшая школа, 2003 г.
5. **Тарг С.М.** Краткий курс теоретической механики: учебник / Тарг С.М. – М.: Высшая школа, 1998 г.
6. **Яблонский, А.А., Никифорова, В.М.** Курс теоретической механики: учебник для вузов. – изд. 12-е, исправленное / Яблонский А.А., Никифорова В.М. – М.: Интеграл-Пресс, 2006 г.

СОДЕРЖАНИЕ